Concours général des lycées Session 2021

MATHÉMATIQUES

(Classes de terminale voie générale spécialité mathématiques)

Durée : 5 heures — L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Problème 1 : Le début justifie la fin

Dans cet exercice, on considère l'ensemble, noté $\mathscr{S}$, des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.
Pour tout nombre réel x, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathscr{S}$ et dont le premier terme vaut x. On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

1. Démontrer que toute suite appartenant à $\mathscr{S}$ est strictement positive à partir du rang 1.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geqslant 2$ pour lequel $u_N \leqslant 1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$.

Ci-dessous, on note E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0, et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers $+\infty$.

4. Démontrer que $0 \in E_0$.
5. **a.** Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire que, si x est un élément de E_0, alors l'intervalle $]-\infty, x]$ est inclus dans E_0.
6. **a.** Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(x) - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

   b. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geqslant 1$ pour lequel $u_N \geqslant N+1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

   c. Démontrer que $1 \in E_\infty$.
7. Démontrer que, si x est un élément de E_∞, alors l'intervalle $[x\,,\,+\infty[$ est inclus dans E_∞.

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un nombre réel δ tel que l'intervalle $]-\infty\,,\,\delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta\,;\,+\infty[$ est inclus dans E_∞.

Tournez la page.

8. On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de la façon suivante. Tout d'abord, on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$ si $(a_n + b_n)/2 \in E_0$, et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ sinon.

a. Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes et ont même limite.

b. Soit δ la limite commune aux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. Démontrer que l'intervalle $]-\infty\ ;\ \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $]\delta\ ;\ +\infty[$ est inclus dans E_∞.

9. On pose $c_2 = \ln(\ln(2))$, $c_3 = \ln(\ln(2\ln(3)))$ et $c_4 = \ln(\ln(2\ln(3\ln(4))))$, et plus généralement, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, $c_\ell = \ln(\ln(2\ln(3\ln(\ldots\ln((\ell-1)\ln(\ell)\ldots))))$.

Démontrer que, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, le nombre réel c_ℓ appartient à E_0.

10. Démontrer que la suite $(c_\ell)_{\ell\geqslant 2}$ converge.

11. Démontrer que $\delta \in E_\infty$.

Problème 2 : La loi du milieu

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac , on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0, 1, 2, \ldots, 2n$.
On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

— on tire trois boules simultanément ;

— si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c, avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c et on replace dans le sac la boule de numéro b ;

— on recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k, on note $\mathbf{P}[D_n = k]$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

I - Étude des petits cas

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_1.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_2.

II - Valeurs extrêmes et symétrie

3. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}[D_n = 0]$.

4. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}[D_n = 1]$ en fonction de n.

5. Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant 2n$. Pourquoi a-t-on $\mathbf{P}[D_n = i] = \mathbf{P}[D_n = 2n - i]$?

6. Calculer l'espérance de la variable aléatoire D_n en fonction de n.

III - Comportement limite

Dans cette partie, on souhaite étudier la loi de D_n lorsque n tend vers $+\infty$. Afin de faciliter cette étude, on démontre tout d'abord un résultat préliminaire.

7. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et par

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Démontrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Il est maintenant temps d'étudier la loi de D_n elle-même.

8. Déterminer, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$, la probabilité p_j que la boule de numéro j soit éliminée lors de la première sélection.

9. Démontrer que, si $n \geqslant 3$, alors $p_j \geqslant \frac{1}{2n}$ pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2n$.

10. On note M_n la plus grande des probabilités $\mathbf{P}[D_n = j]$ lorsque $0 \leqslant j \leqslant 2n$.
Démontrer que M_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

IV – Résultat le plus probable

On rappelle que, pour deux évènements A et B, on note $A\backslash B$ l'évènement selon lequel A est réalisé, mais pas B. En outre, si $\mathbf{P}[B] \neq 0$, on note $\mathbf{P}_B[A]$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.
On souhaite ici démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $\mathbf{P}[D_n = n] = M_n$. Dans ce but, on va démontrer la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1]$.

11. Démontrer que, si $\mathscr{P}_n$ est vraie, alors $P[D_n = n] = M_n$.

12. Démontrer $\mathscr{P}_1$.

On suppose maintenant que l'on dispose d'un entier $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}_{n-1}$ est vraie et d'un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

13. Pour tout entier ℓ compris entre 0 et $2n$, distinct de k et de $k+1$, on note X_ℓ l'évènement selon lequel les trois boules de numéros k, $k+1$ et ℓ sont choisies dès la première sélection.

- **a.** Pourquoi, si $\ell > k+1$, a-t-on $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k] = 0$ et $\mathbf{P}_{X_\ell}[D_n = k+1] = \mathbf{P}[D_{n-1} = k]$?
- **b.** Donner des résultats analogues sur $\mathbf{P}_{X_\ell}[Dn = k]$ et $\mathbf{P}_{X_\ell}[Dn = k+1]$ lorsque $\ell < k$.
- **c.** On note maintenant X l'évènement selon lequel les deux boules de numéros k et $k+1$ sont choisies dès la première sélection. Démontrer que $\mathbf{P}_X[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_X[D_n = k+1]$.

14. Soit Y l'évènement selon lequel l'une des boules de numéros k et $k+1$ est éliminée lors de la première sélection.

- **a.** Démontrer que $\mathbf{P}_{Y\backslash X}[D_n = k] = \mathbf{P}_{Y\backslash X}[D_n = k+1]$.
- **b.** En déduire que $\mathbf{P}_Y[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_Y[D_n = k+1]$.

15. Soit a, b et c les numéros des trois boules choisies lors de la première sélection, avec $a < b < c$.

  a. Soit G l'évènement selon lequel $c < k$. Démontrer que $\mathbf{P}_G[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_G[D_n = k+1]$.

  b. Soit H l'évènement selon lequel $a < k$ et $k+1 < c$. Démontrer que $\mathbf{P}_H[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_H[D_n = k+1]$.

  c. Soit I l'évènement selon lequel $k+1 < a$. Démontrer que, si $k \leqslant n-2$, alors $\mathbf{P}_I[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}_I[D_n = k+1]$.

16. Démontrer que, si $k \leqslant n-2$, alors $\mathbf{P}[D_n = k] \leqslant \mathbf{P}[D_n = k+1]$.

17. Démontrer $\mathscr{P}_n$.

Problème 3 : Que la force soit avec f !

Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul, I un intervalle ouvert de $]0, +\infty[$, et f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives.
On dit que la fonction f est « k-forte » si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \geqslant 0.$$

On dit que f est « k-faible » si, pour tous les réels x et y appartenant à I,

$$\left(y^k f(y) - x^k f(x)\right)\left(\frac{f(y)}{y^k} - \frac{f(x)}{x^k}\right) \leqslant 0.$$

I–Quelques exemples et propriétés

1. Démontrer que la fonction f_1 définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_1(x) = x^2$ est 1-forte et 3-faible.
2. Démontrer que la fonction f_2 définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$ par $f_2(x) = \exp(x)$ est 1-faible mais pas 1-forte.
3. Démontrer que la fonction f_3 définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $f_3(x) = \exp(x)$ est 1-forte mais pas 1-faible.
4. Démontrer que la fonction f_4 définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_4(x) = \frac{1}{x}$ est k-faible pour tout entier $k \geqslant 1$.
5. Existe-t-il une fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ qui soit k-forte pour tout entier $k \geqslant 1$?

II–Quelques critères de force et de faiblesse

6. Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \leqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I, et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k} \geqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

7. Démontrer que f est k-forte si et seulement si

$$\frac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k))} \leqslant \frac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I,et que f est k-faible si et seulement si

$$\frac{\max(x^k, y^k)}{\min(x^k, y^k))} \geqslant \frac{\max(f(x), f(y))}{\min(f(x), f(y))}$$

pour tous les réels x et y appartenant à I.

8. On note g_k et h_k les fonctions définies sur I par $g_k(x) = x^k f(x)$ et $h_k(x) = \frac{f(x)}{x^k}$.

a. Démontrer que, si g_k et h_k sont monotones, alors f est k-forte ou k-faible.

b. Démontrer que, si f est k-faible, alors g_k et h_k sont monotones.

c. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1; \\ 4 & \text{si } x = 1; \\ x & \text{si } 1 < x < 2; \\ 4x & \text{si } 2 \leqslant x. \end{cases}$$

Démontrer que f est 1-forte mais que les fonctions g_1 et h_1 ne sont pas monotones.

9. On suppose dans cette question que f est dérivable sur I et que sa dérivée f'est continue sur I.

a. Démontrer que, si $|f'(x)| \geqslant k\frac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-forte.

b. Démontrer que, si $|f'(x)| \leqslant k\frac{f(x)}{x}$ pour tout réel $x \in I$, alors f est k-faible.

c. Démontrer que les réciproques aux questions **9.a.** et **9.b.** sont vraies.

III – Une multitude de fonctions fortes et faibles

On dit que la fonction f est « forte » s'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-forte, et que f est « faible » s'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel f est k-faible.

10. Démontrer que, si f est faible, la fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ est faible.

11. Démontrer que, si deux fonctions f et g définies sur I sont faibles, les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ sont faibles.

12. Démontrer à l'aide de contre-exemples que, si deux fonctions f et g définies sur I sont fortes, les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ ne sont pas nécessairement fortes.

13. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs strictement positives, et g une fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

a. Démontrer que, si f et g sont faibles, la fonction $g \circ f$ est faible.

b. Démontrer que, si f et g sont fortes, la fonction $g \circ f$ est forte.

IV – Application à la démonstration d'inégalités

14. Soit a, b et c trois réels strictement positifs, et n un entier naturel non nul.
Démontrer que

$$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b+c}{a+c}\right)^n \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

15. Dans cette question, on pourra utiliser le fait que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ de dérivées respectivement $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.
La fonction tan est définie sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
Démontrer que

$$\frac{\sin(a)}{\sin(b)} + \frac{\sin(b)}{\sin(a)} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant \frac{\tan(a)}{\tan(b)} + \frac{\tan(b)}{\tan(a)}$$