Une variante directe pour la suite des « non-carrés »

Nous allons retrouver les résultats particuliers obtenus dans l'article sans utiliser (bien que les arguments soient de même nature) le théorème de Bakir Fahri.

En reprenant les notations du § III de l'article du BV 515 (p.466) :

v est la suite des non-carrés, $v_n = k$ équivaut à $n = k - \lfloor\sqrt{k}\rfloor$ ou aussi en posant $r = \lfloor\sqrt{k}\rfloor$, $k = n + r$. Par suite, (k n'étant pas un carré) nous avons $r^2 < n + r < (r+1)^2$ **(1)**. Tous les membres étant entiers, nous avons les inégalités équivalentes :

$r^2 - r + 1 \leq n < (r+1)^2 - (r+1) + 1$ ou aussi après avoir posé $x^2 - x + 1 = \varphi(x)$

$\varphi(r) \leq n < \varphi(r+1)$ **(2)**. φ définit une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ dont la bijection réciproque est donnée par $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$. D'après **(2)** nous obtenons les inégalités équivalentes :

$r \leq \varphi^{-1}(n) < r + 1$ qui impliquent $\boxed{r = \lfloor\varphi^{-1}(n)\rfloor = \left\lfloor \dfrac{1}{2} + \sqrt{n - \dfrac{3}{4}} \right\rfloor}$

D'après **(1)** nous avons : $n \leq (r+1)^2 - (r+1) < (r + \frac{1}{2})^2$. Nous en déduisons $\sqrt{n} < r + \frac{1}{2}$ puis, $\sqrt{n} + \frac{1}{2} < r + 1$. En reprenant ce qui précède nous obtenons les inégalités :

$r \leq \dfrac{1}{2} + \sqrt{n - \dfrac{3}{4}} < \sqrt{n} + \frac{1}{2} < r + 1$ d'où il vient $r = \left\lfloor \dfrac{1}{2} + \sqrt{n - \dfrac{3}{4}} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{1}{2} + \sqrt{n} \right\rfloor$

Nous prouvons maintenant que : $\dfrac{1}{2} + \sqrt{n - \dfrac{3}{4}} < \sqrt{n + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{2} + \sqrt{n}$. Dans $\mathbf{R}^+$ cela équivaut à prouver en passant aux carrés que :

$n - \dfrac{3}{4} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \dfrac{1}{4} < n + \sqrt{n} < n + \sqrt{n} + \dfrac{1}{4}$ **(3)**

Or ces deux inégalités **(3)** sont vraies car $n - \dfrac{3}{4} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \dfrac{1}{4} = n - \dfrac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}}$ et $n - \frac{3}{4} < n - \frac{1}{2} < n$ pour la première et $\dfrac{1}{4} > 0$ pour la seconde.

De tout cela, nous concluons que :

$$r \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} < \sqrt{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2} + \sqrt{n} < r + 1$$

Ainsi,

$$\forall a \in [-\frac{3}{4}, 0] \quad r = \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n + a} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n + \sqrt{n}} \right\rfloor \quad \text{puis } v_n = n + \left\lfloor \sqrt{n + \sqrt{n}} \right\rfloor$$

Éric TROTOUX
Mel : eric.trotoux@orange.fr