

♫ Brevet de technicien supérieur ♫

Conception de produits industriels mai 2011

EXERCICE 1

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples

Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.

Notation :

Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} est :	-1	5	\vec{v}

2. Avec les mêmes données qu'au 1.,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La norme du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est :	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	4

3. On donne les matrices M et N : $M = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$M - 2N$ est égale à :	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Avec les mêmes données qu'au 3.,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M \times M = M^2$ est :	$\begin{pmatrix} 377 & 356 & 170 \\ 356 & 337 & 160 \\ 170 & 160 & 77 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 169 & 64 & 144 \\ 144 & 49 & 144 \\ 36 & 16 & 25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2

6 points

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

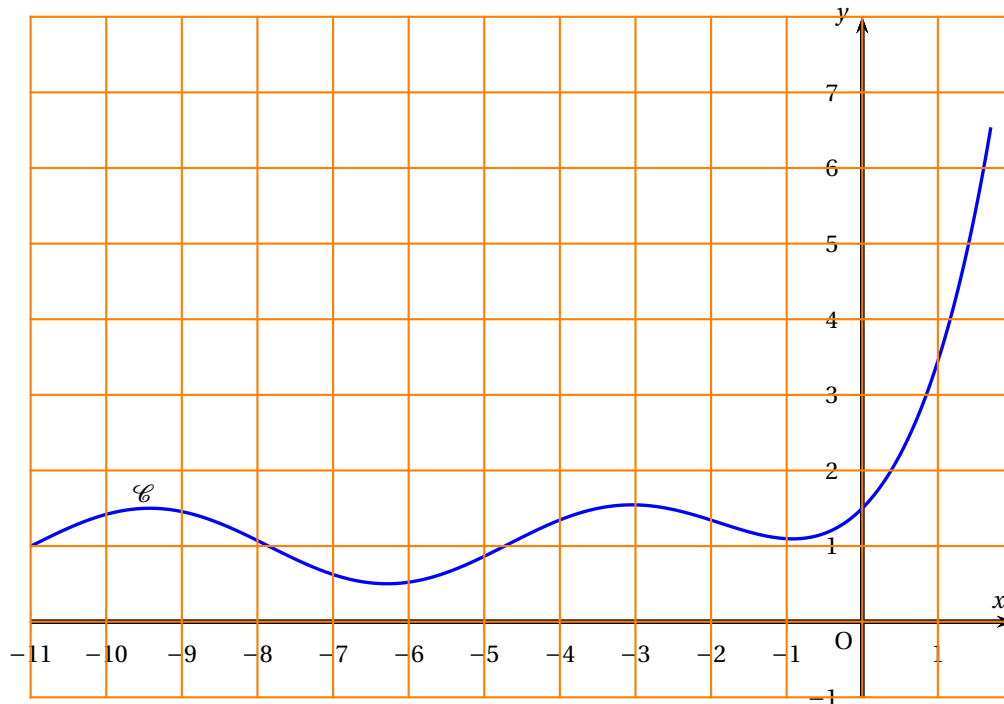
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 1 - \sin x$, où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

- Déterminer les solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$.
- Déterminer la constante réelle k telle que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = k \cos x + 1$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
- Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = \frac{3}{2}$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 + e^x - \frac{1}{2} \cos x$.

On a tracé ci-dessous sa courbe représentative \mathcal{C} dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .



- Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos x$.
 - En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est $f(x) = \frac{3}{2} + x + \frac{3}{4}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
- Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
 - Étudier les positions relatives de \mathcal{C} et T au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE 3

10 points

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère les nombres réels $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$ et $t_4 = 4$. On se propose de construire une courbe B-spline de degré 2 de vecteur $n(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$.

A. Détermination des fonctions polynômes B-splines

On rappelle que les fonctions polynômes B-splines de degré m associées au vecteur $n(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$ sont définies sur \mathbb{R} et pour $m \neq 0$, par :

$$N_{i,m}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m} - t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1} - t}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t).$$

1. On a déterminé des fonctions polynômes B-splines de degré 0 et 1 associées au vecteur nœud $(0, 1, 2, 3, 4)$ qui ont été rassemblées dans les tableaux ci-dessous.

t	0	1	2	3	4
$N_{0,0}(t)$	0	1	0	0	0
$N_{1,0}(t)$	0	0	1	0	0
$N_{2,0}(t)$	0	0	0	1	0
$N_{3,0}(t)$	0	0	0	0	1

t	0	1	2	3	4
$N_{0,1}(t)$	0	t	$2 - t$	0	0
$N_{1,1}(t)$	0	0		$3 - t$	0
$N_{2,1}(t)$	0	0	0	$t - 2$	$4 - t$

Déterminer $N_{1,1}(t)$ pour tout t de l'intervalle $[1, 2]$.

2. Le tableau suivant donne les fonctions polynômes B-splines de degré 2 associées au vecteur $n(0, 1, 2, 3, 4)$:

t	0	1	2	3	4
$N_{0,2}(t)$	0	$\frac{1}{2}t^2$	$-t^2 + 3t - \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2}$	0
$N_{1,2}(t)$	0	0	$\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}t^2 - 4t + 8$

Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[2, 3]$, $N_{1,2}(t) = -t^2 + 5t - \frac{11}{2}$.

B. Détermination des équations paramétriques d'un des arcs de la courbe B-spline

Dans le plan muni du repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 8 centimètres, on considère les points $P_0(0, 1)$ et $P_1(2, 1)$. La courbe B-spline associée aux points P_0 et P_1 , au vecteur $n(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$ et aux polynômes B-splines de degré 2 est

définie par $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{i=1} N_{i,2}(t) \overrightarrow{OP_i}$.

Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[1, 2]$, le point $M(t)$ a pour coordonnées :

$$x(t) = t^2 - 2t + 1 \text{ et } y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1.$$

Dans ce qui suit, **on admet** que, pour tout t de l'intervalle $[2, 3]$, le point $M(t)$ a pour coordonnées $x(t) = -2t^2 + 10t - 11$ et $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1$.

C. Construction de la courbe B-spline

On considère l'arc C_1 , ensemble des points $M(t)$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = f_1(t) = t^2 - 2t + 1 \\ y(t) = g_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1 \end{cases}, \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [1, 2].$$

1. (a) Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[1, 2]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.
 (b) Préciser des vecteurs directeurs des tangentes à C_1 aux points $M(t)$ de paramètres 1 et 2.
2. On considère l'arc C_2 , ensemble des points $M(t)$ de coordonnées :
- $$\begin{cases} x(t) = f_2(t) = -2t^2 + 10t - 11 \\ y(t) = g_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1 \end{cases}, \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [2, 3].$$

On admet que le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 sur $[2; 3]$ est le suivant :

t	2	$\frac{5}{2}$	3		
$f_2'(t)$	2	+	0	-	-2
$f_2(t)$	1	$\frac{3}{2}$		1	
$g_2'(t)$	0	-	-1		
$g_2(t)$	1	$\frac{7}{8}$		$\frac{1}{2}$	

Déterminer (par lecture du tableau ou par calcul) des vecteurs directeurs des tangentes à C_2 aux points $M(t)$ de paramètres 2, $\frac{5}{2}$ et 3.

3. On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) où l'unité graphique est 8 centimètres.
- (a) Construire les tangentes à la courbe C_1 aux points $M(1)$ et $M(2)$.
 (b) Construire les tangentes à la courbe C_2 aux points $M(2)$, $M\left(\frac{5}{2}\right)$ et $M(3)$.

- (c) On désigne par A le point de coordonnées $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

On admet que pour t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, l'arc C_0 de la courbe B-spline cherchée est le segment $[OA]$.

Construire sur le même graphique les arcs de courbe C_0, C_1, C_2 .