

La démarche de découverte expérimentale dans les sujets du baccalauréat intégrant l'outil informatique

Jean-Jacques Dahan (IREM de Toulouse)

L'expérimentation à grande échelle d'une épreuve pratique en mathématiques au baccalauréat avant une vraisemblable intégration définitive soulève de multiples questionnements sur les connaissances et les compétences des enseignants qui vont préparer leurs élèves à une telle épreuve. La question centrale qui sous-tend cette présentation est la suivante :

L'ancrage rationaliste imposé depuis très longtemps par l'institution a généré et génère une pratique et un enseignement de cette discipline largement centrés sur la démonstration ; les intentions de l'institution dans l'introduction d'une épreuve pratique au baccalauréat vont dans le sens d'une nouvelle pratique plus expérimentale que l'usage plus affirmé des technologies nouvelles doit favoriser. Comment donc peut-on aider les collègues marqués par cet ancrage rationaliste à assumer et maîtriser un enseignement et une pratique ayant un ancrage plus empiriste ?

Pour tenter de répondre à cette question, cette présentation se veut un dossier informatif sur les **points cruciaux** qui permettent de comprendre une nouvelle pratique des mathématiques, en réalité une pratique plus en adéquation avec les vraies mathématiques. Elle éclaire les côtés expérimentaux et heuristiques de la démarche de découverte plus particulièrement en géométrie quand l'outil technologique utilisé est un logiciel de géométrie dynamique (le logiciel utilisé étant Cabri aussi bien dans la version 2D que 3D).

Point 1 : En géométrie, le rôle crucial de la figure doit être connu : s'il est vrai que la différence entre figure et dessin commence à être connue par les enseignants, ce qui est beaucoup moins connu, ceux sont les quatre appréhensions possibles d'une figure dans le cadre de la résolution d'un problème de géométrie et surtout le fait que seules deux d'entre elles ont une valeur heuristique reconnue, et ce ne sont pas celles qui sont travaillées dans notre enseignement habituel des mathématiques. Cela est montré dans cette présentation.

Point 2 : Toute une terminologie issue des sciences expérimentales apparaît avec des significations non unifiées. Nous donnons des définitions précises des mots-clés correspondant à des pratiques bien repérées. Ces définitions s'appuient à la fois sur les étymologies de ces mots et leurs usages en sciences expérimentales. Sont abordés, les mots « exploration », « investigation » « expérience », « expérimentation ». Concernant les expérimentations, deux types sont mises en évidence : les expérimentations génératives (celles qui génèrent une conjecture) et les expérimentations validatives (celles qui viennent valider ou invalider une conjecture).

Point 3 : Les procédures d'invalidation et de validation sont définies avec précision dans le cadre d'une pratique expérimentale des mathématiques afin de ne pas confondre la validation expérimentale (la preuve expérimentale) et la démonstration (la preuve déductive).

Dans le cadre de ces procédures, on rappelle les deux techniques de validation en environnement papier crayon qui sont, soit au niveau perceptif, soit au niveau déductif (en liaison avec les niveaux de géométrie G1 et G2 de Parzysz, cf. Parzysz, B. (2003) : *Articulation et déduction dans une démarche géométrique en PE1*, in *Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques*. Tome 2, Démarches et savoirs à enseigner, chap. 1 (Espace et géométrie), 107-125. Ed. ARPEME) et les deux techniques correspondantes en environnement informatique, soit au niveau perceptif de l'écran de l'ordinateur, soit au niveau déductif assisté par l'ordinateur ou plus précisément par les outils de vérification du logiciel utilisé (en liaison avec les niveaux de géométrie G1 Informatique et G2 Informatique étendant ceux de Parzysz et que j'ai mis en évidence dans ma thèse sur la démarche expérimentale).

Point 4 : La démarche vers la découverte prenant enfin l'importance qui ne lui était accordée jusqu'à présent, il est normal de se questionner sur les étapes qui peuvent mener à cette découverte autant que sur celles qui viendront la valider quand on utilise un instrument médian d'expérimentation technologique (un logiciel de géométrie dynamique, un tableur ou un logiciel de calcul formel). Un modèle de décomposition de la démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri en phases pré et post conjecture est présenté (ce modèle pourra être utilisé dans d'autres environnements).

Point 5 : Enfin, un sujet choisi parmi les sujets proposés l'an dernier comme sujets possibles de l'épreuve pratique a été analysé à travers le modèle donné de la démarche de découverte pour voir quelles étapes de cette démarche il favorisait et quelles techniques de validation il faisait utiliser : le résultat de cet analyse est donné et il montre, comme donnerait l'analyse de nombreux autres sujets, que l'approche expérimentale proposée dans ces sujets reste extrêmement modeste et cantonnée à une seule étape pré conjecture avec le même type d'expérimentation. On y aura aussi noté l'absence constante de preuve expérimentale, ce qui peut paraître pour le moins incongru.

1. Figures. Appréhensions figurales avec leurs valeurs heuristiques.

1.1. Définition : une figure est une spécification, un ensemble de propriétés géométriques qui la caractérisent : elle peut être modélisée par une infinité de dessins synthétisant la même spécification, ces dessins étant ce que l'on appelle des représentants de la figure.

En environnement papier crayon, on accède à une figure donnée par l'intermédiaire d'un de ses représentants, un dessin synthétisant cette spécification sur une feuille donnée. Il est possible d'utiliser d'autres dessins, d'autres représentants (qu'on nomme en pratique, « cas de figure ») pour accéder à la même figure, soit en modifiant le dessin initial soit en le refaisant sur une autre feuille

En géométrie dynamique, on accède à une figure donnée par l'intermédiaire d'un dessin pixellisé sur l'écran d'un ordinateur. La différence fondamentale avec l'environnement papier crayon est que l'on peut générer autant d'autres représentants de cette figure par manipulation directe, c'est-à-dire par déplacement direct d'objets du dessin pixellisé initial avec la souris ou en modifiant des paramètres de la figure (distances, angles, coordonnées).

1.2. Les appréhensions figurales

Une figure étant donnée, en général par l'un de ses représentants, lui-même issu de sa spécification (pour résumer les hypothèses d'un problème à résoudre), Duval a mis en évidence quatre appréhensions possibles de cette figure par le chercheur en vue de progresser vers la solution :

→ L'appréhension perceptive qui consiste en un traitement automatique de l'image par le cerveau : on peut l'illustrer par les illusions d'optique ou paradoxes d'ordre visuel qui montrent bien cette automaticité du traitement.

→ L'appréhension séquentielle qui consiste en la recherche des constructions qui ont permis de générer la figure.

→ L'appréhension discursive qui consiste à lire la figure comme un réservoir d'hypothèses auquel on cherche à appliquer des théorèmes connus pour en déduire des conclusions que l'on ne cherche pas à obtenir même de manière perceptive.

→ L'appréhension opératoire qui consiste en un traitement de la figure qui fait imaginer soit une décomposition de cette figure en sous-figures, soit une déformation continue du représentant donné entre différents cas de figure.

Duval a établi, du moins en environnement papier crayon, que les appréhensions **séquentielle** et **discursive** avaient une **très faible valeur heuristique** alors que les appréhensions **perceptive** et **opératoire** en avaient une **très forte**.

Le premier point doit être surprenant et paradoxal pour un enseignant français si on pense au rôle important qu'on affecte aux exercices utilisant les programmes de constructions dans l'apprentissage au collège et au rôle fondamental qu'on affecte à la démonstration dans tout le curriculum du collège, du lycée mais aussi de l'université. On apprend à découvrir des programmes de construction, à rédiger des démonstrations mais on n'apprend pas à découvrir ou du moins on n'apprend pas à se mettre dans une situation favorable à la découverte.

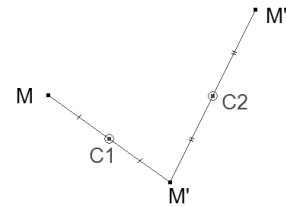
Concernant le second point, l'heuristique de l'appréhension perceptive est moins surprenante. En effet, cette appréhension est un accouplement d'une image reçue par le cerveau et de son traitement automatique, son interprétation qui dépend des connaissances du sujet et de son réservoir d'images immédiatement disponibles. C'est donc un travail analogique sous-jacent, lui, fortement heuristique qui serait à l'origine de l'heuristique de cette appréhension.

Concernant toujours le second point, on peut comprendre même naïvement qu'un logiciel de géométrie dynamique favorise les initiatives permettant une appréhension opératoire ; en effet, la possibilité de déformation continue est la première manipulation naturelle à laquelle un utilisateur se livre quand il veut interagir avec la figure à l'aide de sa souris et cette manipulation est fortement corrélée aux différents types d'appréhensions opératoires. Il y a

évidemment bien d'autres techniques d'utilisations d'un tel logiciel qui ne font que renforcer l'appréhension opératoire d'une figure dans un tel environnement (possibilité d'activer des traces, obliger des points à passer d'un objet à un autre par redéfinition, obtention automatique de lieux...).

L'exemple suivant montre deux appréhensions possibles d'une même figure :

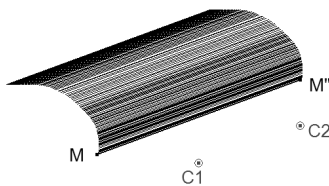
La figure de droite est celle construite pour découvrir la composée de deux symétries centrales (la composée des symétries centrales par rapport à $C1$ et $C2$). M est un point libre, M' son symétrique par rapport à $C1$ et M'' le symétrique de M' par rapport à $C2$.



Une appréhension discursive de cette « figure » consiste à reconnaître une configuration connue (celle du théorème des milieux) et ainsi pouvoir mener un discours déductif du genre : Les hypothèses du théorème des milieux étant remplies, je peux appliquer ce théorème pour en déduire que M'' est le transformé de M par une est une translation.

On peut constater que cette appréhension nécessite de sélectionner les bonnes données, le bon théorème associé à une conclusion pertinente que l'on peut ainsi atteindre : c'est cette complexité des paramètres à maîtriser qui rend cette approche peu heuristique et cela d'autant plus que le niveau de connaissance et de savoir faire est bas. D'un point de vue anglo-saxon, on parlerait d'approche procédurale.

Une appréhension opératoire, ici possible grâce à la dynamicité de la figure peut être par exemple la suivante :



On peut constater que si on tire de manière aléatoire sur le point M , le positionnement relatif de M'' par rapport à M génère instantanément la conjecture « la transformation est une translation ».

Cette appréhension nécessite cette fois une connaissance plus expérimentale des transformations non liée spécifiquement à des propriétés mathématiques à prouver mais plutôt à reconnaître. On peut comprendre qu'un plus large spectre d'élèves pourra générer une telle conjecture. D'un point de vue anglo-saxon, on parlerait cette fois d'une approche plus conceptuelle.

2. La terminologie des sciences expérimentales.

Une **exploration** consiste en la recherche d'indices qui permettent d'avancer vers la connaissance d'un phénomène. Une **investigation** est une exploration systématique avec des procédures connues dans des champs bien repérés. Exploration et investigation s'appuient sur des figures dont la manipulation va générer des données à interpréter pour avancer vers la découverte. C'est la notion d'expérimentation qui apparaît dans un sens qui est celui des sciences expérimentales.

Définition : Une expérience est une procédure dont l'exécution génère des faits observables et dont la fonction est une fonction de génération ou de validation d'hypothèses.

Notons qu'une expérience est un programme à réaliser et que son exécution est ce qu'on nommera « expérimentation ». C'est l'expérimentation qui est la pourvoyeuse de données (par l'intermédiaire des faits observables).

Les expérimentations réalisées sur des figures, sont donc des procédures qui génèrent des données dont l'interprétation peut mener soit à la génération d'une conjecture soit à la

validation ou l'invalidation d'une conjecture. Les premières sont qualifiées de génératives et les secondes de validatives. Les mots « validation » et son pendant « invalidation » sont définis ci-dessous.

3. Techniques de validation.

3.1. Valider, invalider, des procédures clés d'une démarche expérimentale

Invalider une propriété c'est contredire une des conditions nécessaires qu'elle implique, ce qui conduit à la considérer comme fausse et donc à la rejeter.

Valider une propriété c'est constater qu'une des conditions nécessaires qu'elle implique est vérifiée, ce qui conduit à ne pas la considérer comme fausse et donc à l'accepter.

3.2. Techniques de validation en environnement informatique

3.2.1. Techniques de validation reposant sur le perceptif : les propriétés apparaissent sur l'écran ; des superpositions sont constatées visuellement, des propriétés de parallélisme ou perpendicularité sont constatées visuellement, une courbe (ou un lieu) est reconnue comme étant un cercle, une parabole... visuellement.

Ce niveau perceptif est différent du niveau équivalent en papier crayon car l'environnement informatique permet d'ouvrir une fenêtre sur un champ de découverte plus vaste.

3.2.2. Techniques de validation reposant sur un déductif laissé à la charge du logiciel.

Cela veut dire que cette fois une propriété n'est plus perçue par le chercheur, elle est « donnée » par le logiciel au chercheur qui a préalablement « posé » la question. Cette propriété est une conséquence « calculée » par le logiciel des spécifications de la figure construite. Une courbe étant construite, si en approchant le curseur de cette courbe on obtient le message « *cette parabole* », cela veut dire que le logiciel a déduit des données fournies par la construction que la courbe était nécessairement une parabole. De même si on teste avec l'oracle de Cabri le parallélisme de deux droites et que la réponse obtenue est « *les objets sont parallèles* », cela veut dire que le logiciel a déduit des données fournies par la construction que les deux droites en question étaient nécessairement parallèles.

Ce niveau déductif est encore très différent de son équivalent en papier crayon : il apporte toute la précision du calcul informatique ainsi que les mathématiques embarquées et génère une confiance dans les validations jusqu'à des limites sans équivalent en papier crayon.

4. Décomposition formelle d'une démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri géomètre.

- Les résultats de mon travail de recherche (réalisé dans le cadre du laboratoire IMAG de l'Université Joseph Fourier de Grenoble) ont mis en évidence, grâce à l'analyse de démarches de résolutions de problèmes de boîtes noires en particulier, que la démarche expérimentale de découverte est (serait) un enchaînement d'expérimentations où l'expérimentation serait entendue dans un sens englobant sa préparation, sa mise en œuvre, son interprétation. Ce serait donc un enchaînement de maillons quaternaires du type [M.P.E.I.] où :

<p>M. est le montage (construction de la figure), P. le protocole (la manière dont l'exploration sera menée), E. l'exploration prévue par le protocole avec les données générées par cette expérimentation et I. l'interprétation de ces données (génération d'une conjecture ou validation/invalidation d'une conjecture).</p>

Ces maillons quaternaires constituent les micro étapes de la démarche.

- Il a aussi été mis en évidence que cet enchaînement de micro étapes peut être découpé en blocs qui constituent les macro étapes. Deux types de macro étapes ont été mises en évidence pour décrire une démarche de découverte expérimentale médiée par Cabri, les macro

étapes pré conjecture (constituant la phase de conjecture) et les macro étapes post conjecture (constituant la phase de validation et de doute). Elles sont décrites succinctement ci-dessous :

→ **La recherche erratique** est composée d'une succession d'explorations sans interprétation ou avec des interprétations indépendantes qui donnent l'impression au chercheur de ne pas progresser.

→ **La recherche ordonnée** apparaît quand le chercheur concentre ses explorations autour d'un thème précis et arrive à générer des données qu'il peut au moins classer à défaut de les interpréter de manière inductive.

→ **L'accélération de la recherche** est une étape qui se développe quand le chercheur a l'impression de sentir ou tenir la solution et qui consiste en des tentatives rapides et brouillonnes de validation.

→ **La conjecture** : c'est le moment où le chercheur pense avoir trouvé. Il considère à ce moment que la plausibilité du résultat qu'il a découvert est forte.

Remarque : Très souvent dans le cursus français, nos élèves, s'ils ont parcouru ces étapes, pensent que leur tâche est accomplie. Les enseignants, hélas, pensent aussi que le rôle d'une démarche expérimentale se confine à la génération d'une conjecture.

La méthode expérimentale scientifique englobe néanmoins les étapes post conjecture suivantes.

→ **L'analyse synthèse expérimentale** est une phase d'expérimentation validative où la validation se fait de manière perceptive sur l'écran de l'ordinateur. Cette macro étape est à mettre en liaison avec les techniques de validation de G1 Informatique.

→ **L'analyse théorique et synthèse quasi théorique** est aussi une phase d'expérimentation validative où la validation se fait grâce aux outils technologiques, ici les outils de vérification du logiciel. Cette macro étape est à mettre en liaison avec les techniques de validation de G2 Informatique.

→ **L'analyse critique** est une phase où une expérimentation validative est à nouveau menée, plutôt à un niveau perceptif pour essayer de conforter la conjecture « prouvée expérimentalement ». Elle peut aussi mener finalement à une invalidation d'une conjecture préalablement prouvée expérimentalement.

Cette dernière étape est une étape fondamentale de la démarche scientifique en sciences expérimentales. Elle doit aussi l'être en mathématiques dans le cadre d'une démarche expérimentale et en particulier lorsque l'expérimentation est menée à travers la modélisation des objets géométriques de la géométrie euclidienne fournie par le micromonde Cabri.

5. Analyse d'un sujet d'épreuve pratique

La banque de sujets proposés en 2006/2007 pour l'épreuve pratique du baccalauréat constitue une réserve objective d'informations sur les intentions de l'institution à la fois sur le contenu de cette épreuve mais aussi et surtout sur l'orientation que les professeurs devront donner à leur enseignement. L'analyse du sujet N°12 de cette banque se veut emblématique de l'analyse de l'ensemble de ces sujets car elle résume la conception implicite de la démarche expérimentale médiée technologiquement qui est suggérée. Cette analyse montre plus particulièrement dans les sujets de géométrie :

Concernant la partie pré conjecture

On note une première phase de construction qui doit mettre l'élève *de facto* dans la macro étape d'accélération de la recherche avec expérimentation générative suivie immédiatement de la conjecture (le professeur vient éventuellement fournir la bonne figure pour que l'élève puisse expérimenter et arriver à la conjecture).

On constate qu'il n'y a pas et qu'il ne peut y avoir de recherche erratique car le sujet n'est pas ouvert et que temps imparti à cette épreuve est trop court.

On constate aussi qu'il n'y a pas de recherche ordonnée et qu'il est difficile qu'une telle étape apparaisse, en effet, une telle recherche nécessite des techniques d'investigation qui sont dans une certaine mesure, propres à chaque logiciel.

Concernant la partie post conjecture

On constate qu'il n'y a pas d'expérimentation validante donc pas de démarche expérimentale post conjecture

L'absence de preuve expérimentale (absence totale d'incitation à travailler dans G2 Informatique) est flagrante dans l'ensemble des sujets de géométrie. A aucun moment l'élève n'est incité à faire des vérifications avec son logiciel. Au contraire, pratiquement tous les sujets basculent après la production de la conjecture dans G2, c'est-à-dire dans le monde rationaliste du déductif pour faire produire une démonstration !

Deux paramètres cruciaux manquent :

→ Toutes les recherches faites en particulier autour des narrations de recherche (IREM de Montpellier) et les problèmes longs (IREM de Lyon) ont montré l'importance cruciale du paramètre temps dans des activités de vraie recherche aussi bien en amont qu'en aval de la conjecture (avec la preuve expérimentale et la preuve déductive). Or le temps imparti aux élèves pour cette épreuve pratique est amputé de moitié par un travail déductif qui n'a pas sa place dans une telle épreuve et il est difficile de sortir de l'ancrage rationaliste et procédural habituel dans un tel contexte.

→ Les mêmes recherches de l'IREM de Lyon et par exemple les expérimentations de recherches collaboratives réalisées en Australie ont confirmé l'importance du travail de groupe dans un vrai travail de recherche. Or le format des sujets exclut tout travail de groupe et ne l'envisage même d'aucune façon.

6. Conclusion

Ayant travaillé depuis très longtemps de manière active pour promouvoir une pratique des mathématiques qui soit plus expérimentale en utilisant au maximum les potentialités des technologies nouvelles (calculatrices, logiciels de calcul formel et surtout de géométrie dynamique) aussi bien dans mes classes qu'en formation initiale ou continue des enseignants, je pense que l'introduction de l'épreuve pratique est une révolution en soi. Elle va permettre de changer le comportement des professeurs et surtout de beaucoup de parents qui ont été un frein à une évolution des pratiques dans le sens d'un enseignement plus expérimental.

Toutes les remarques qui précèdent ont pour but de montrer qu'il y a des moyens de comprendre les nouvelles pratiques à venir et surtout les anticiper car on enseigne mieux ce que l'on connaît que ce que l'on découvre.

Les points que j'ai abordés dans cette présentation méritent d'être connus au moins pour éviter aux enseignants d'aborder de manière trop erratique une nouvelle façon d'enseigner qui ne leur a pas été enseignée et surtout pour comprendre en quoi consiste une démarche expérimentale scientifique médiée ou pas par des instruments technologiques.