Épreuve I

Académies de Caen et Rouen

Exercice 1. Jeux d'aiguille

On s'intéresse, dans cet exercice, à l'expérience qui consiste à jeter au hasard un grand nombre de fois une aiguille sur un parquet composé de lattes parallèles. On admettra qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

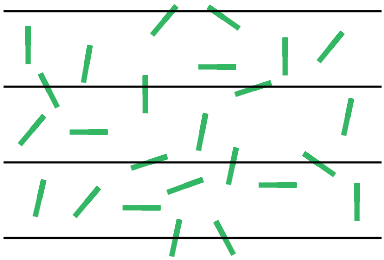


Figure I.1

- L'unité de longueur choisie est la longueur de l'aiguille.
- Toutes les lattes de parquet ont pour largeur 2.

L'objectif de l'exercice est d'estimer la probabilité p de l'événement C : « L'aiguille tombe à cheval sur une rainure du parquet ».

Modélisation

Les rainures du parquet sont assimilées à des droites parallèles et l'aiguille à un segment de longueur 1. La position de l'aiguille sur une latte est donnée par son milieu I et un couple (x, y) de coordonnées définies de la façon suivante :

- x est la mesure en radians, comprise entre 0 et π de l'angle formé par l'aiguille et les parallèles aux rainures.
- y est la distance entre le point I et la rainure du parquet la plus proche de l'aiguille. $y \in [0;1]$.
- Sur la figure I.2, une aiguille est repérée par ses coordonnées (x, y), l'autre par $\left(0,75; \frac{\pi}{4}\right)$.

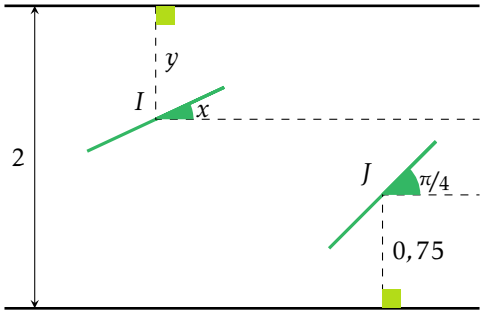


Figure I.2

1. On considère quatre positions de l'aiguille, correspondant aux points P, Q, R et S suivants : $P\left(\frac{\pi}{2}; 0,4\right)$, $Q\left(\frac{\pi}{3}; 0,5\right)$, $R\left(\frac{3\pi}{4}; 0,2\right)$, $S\left(\frac{5\pi}{6}; 0,9\right)$,
   Pour chacune de ces positions, indiquer, en le justifiant, si l'événement C est réalisé ou non.
2. Soit I un point de coordonnées $(x; y)$. I correspond à la position de l'aiguille représent sur la figure I.3.

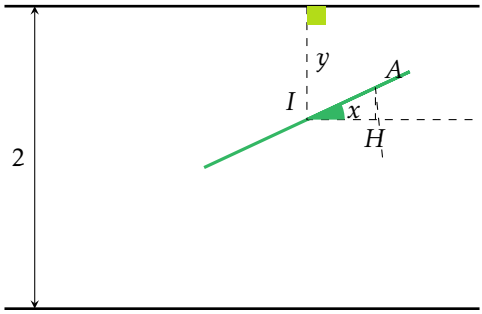


Figure I.3

   a. Exprimer la distance AH en fonction de x

   b. En déduire que l'événement C est réalisé si et seulement si : $y < \frac{1}{2}\sin(x)$.

3. On a lancé 25 fois l'aiguille. Les positions ont été relevées sur la figure 1. Chacun des graphiques I.4 prétend traduire la situation : chacun des points a pour coordonnées le couple de coordonnées correspondant à une position de l'aiguille, la courbe représente la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(x)$. Quel est celui de ces graphiques qui correspond à la situation de la figure I.1 ?

4. Lorsqu'on exécute l'algorithme ci-dessous pour $n = 10\,000$, la variable f contient 0,315 2. Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

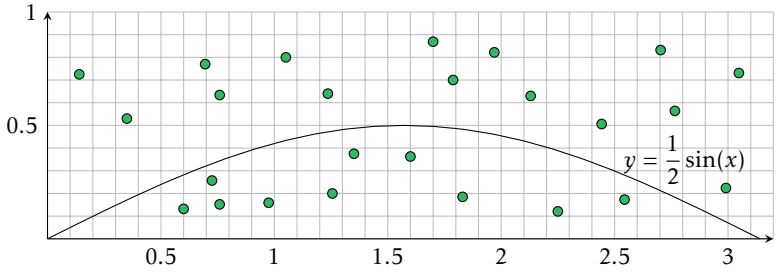
```
k ← 0
pour i allant de 1 à n faire
    x ← valeur aléatoire dans [0;pi]
    y ← valeur aléatoire dans [0;1]
    si y < 1/2 sin(x) alors
        k ← k+1
    fin
fin
f ← k/n
```

5. Dans un repère orthogonal donné, on considère le domaine du plan délimité par la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}\sin(x)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$ (partie colorée). On considère également le rectangle $OEFG$ où $O(0\,;0)$, $E(\pi\,;0)$, $F(\pi\,;1)$ et $G(0\,;1)$.

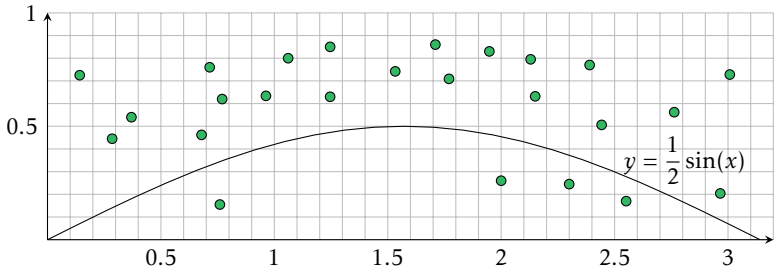
La probabilité C est égale au quotient de l'aire de ce domaine par l'aire du rectangle $OEFG$.

D'après la formule d'Archimède, l'aire du domaine situé sous l'arc de la parabole représenté sur la figure I.5 passant par O, B et E est égal au quatre tiers de l'aire du triangle OBE.

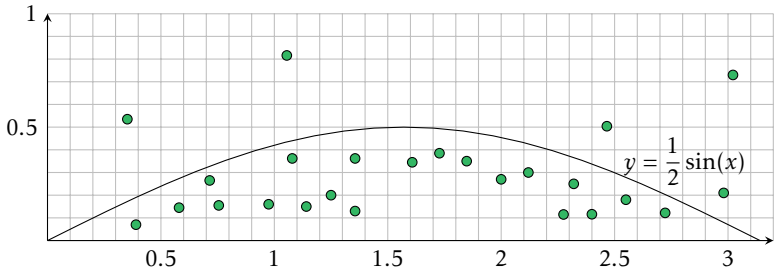
En déduire un encadrement de la probabilité de l'événement C.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Figure I.4

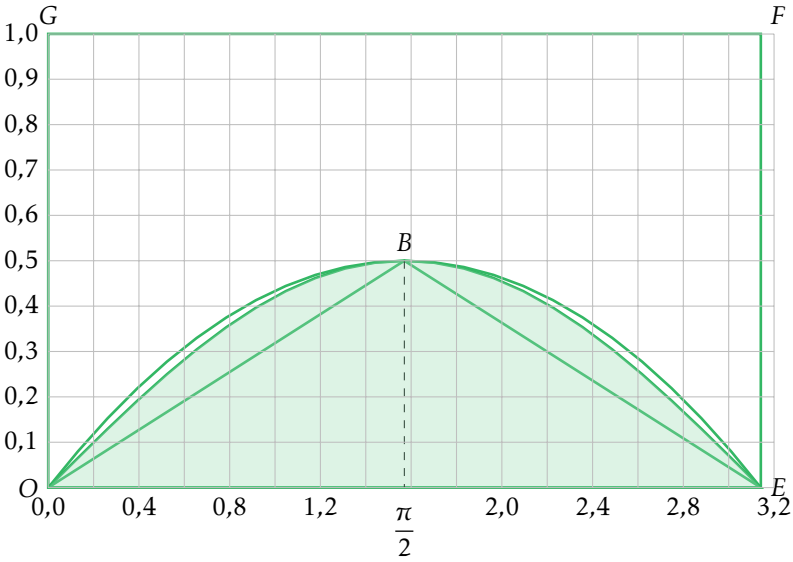


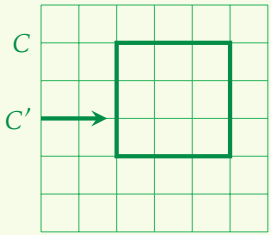
Figure I.5

Exercice 2. Des carrés et des cases

Pour répondre aux questions posées, on pourra utiliser les figures proposées en annexe, à rendre avec la copie.

Définition

Définition : Dans un carré C composé de $n \times n$ cases, on appelle *sous-carré* $m \times m$ de C tout carré composé de $m \times m$ cases contenu dans C.
Exemple : Le carré C', composé de 3×3 cases, est un sous-carré du carré C, composé de 6×6 cases.



Un cas particulier

On considère dans cette partie un carré C composé de 5×5 cases et C' un sous-carré 3×3 du carré C.

1. Combien existe-t-il de positions possibles du carré C' dans le carré C ?
2. Disposer une case noire (ou plusieurs) dans le carré C figurant en annexe de sorte que tout sous-carré C' de C à 3×3 cases contienne exactement une cases noire.
3. Disposer des cases noires dans le carré C figurant en annexe pour que tout sous-carré C' de C à 3×3 cases contienne exactement :
   a. Deux cases noires ;
   b. Trois cases noires ;
   c. Quatre cases noires.
4. Montrer que si l'on peut disposer des cases noires dans le carré C pour que chaque sous-carré C' contienne exactement p cases noires, on pourra placer des cases noires dans le carré C pour que chaque carré C' contienne exactement $9 - p$ cases noires.
5. Que peut-on en conclure quant au nombre de cases noires qui peuvent être contenues dans chaque sous-carré C' d'un carré C.

Généralisation

On considère, dans cette partie, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$:

- Un carré C composé de $(2k+1) \times (2k+1)$ cases ;
- Un sous-carré C' du carré C, à $(2k-1) \times (2k-1)$ cases.

1. Combien existe-t-il de positions du carré C' dans le carré C ?
2. Justifier que, si p est un entier naturel tel que $p \leqslant (2k-3)^2$, on peut disposer des cases noires dans C de telle façàon que tout sous-carré C' contienne exactement p cases noires.

3. En déduire que, si p est un entier naturel tel que $p \leqslant (2k-3)^2$, on peut placer des cases noires dans C pour que chaque sous-carré C' contienne exactement $(2k-1)^2 - p$ cases noires.

On souhaite démontrer dans cette partie que, pour tout entier naturel $p \leqslant (2k-1)^2$, on peut disposer des cases noires dans C de telle façon que tout sous-carré C' contiennent exactement p cases noires.

4. Cette propriété est-elle vraie pour $k = 2$? Pour $k = 3$?

5. Montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant 4$:

$$(2k-1)^2 - (2k-3)^2 \leqslant (2k-3)^2.$$

6. Conclure.

APMEP

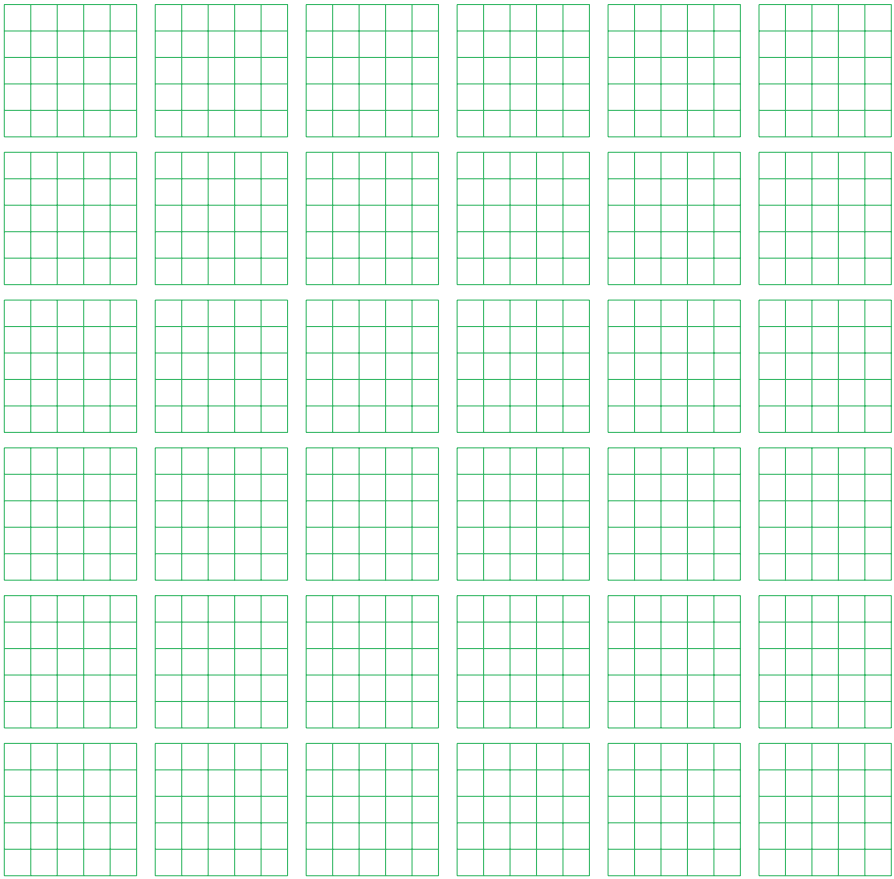


Figure I.6: *Annexe des carrés et des cases*

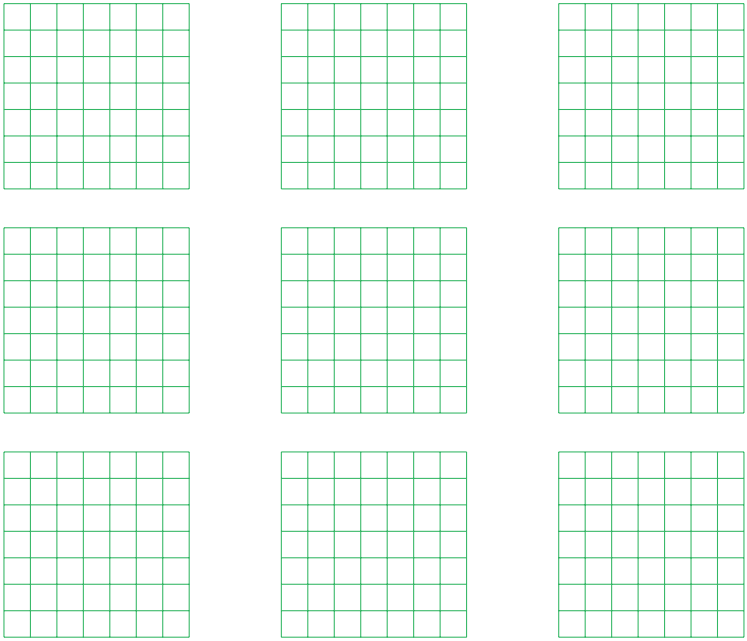


Figure I.7: *Annexe des carrés et des cases*

Exercice 3. Origamis

On ne considère dans cet exercice que des feuilles de papier de format A4 c'est-à-dire de dimensions 21 cm sur 29,7 cm.

Création d'un cornet par pliages

À partir d'une feuille A4, il s'agit de réaliser, par découpage et pliages successifs, un cornet.
Voici le protocole de construction de ce cornet, illustré sur la figure I.8.

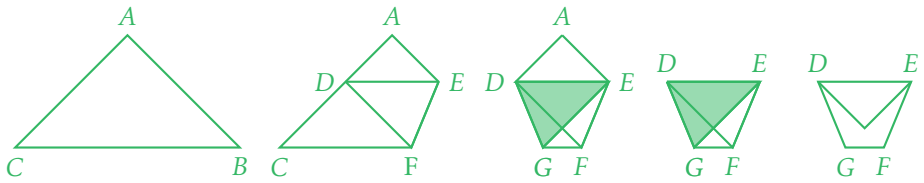


Figure I.8

Étape 1 : découper dans la feuille de format A4 un carré $ABA'C$ de 21 cm de côté.
Étape 2 : plier ce carré suivant (BC) pour obtenir un triangle rectangle isocèle vérifiant $AB = AC = 21$ cm.
Étape 3 : placer le sommet C sur un point D du segment $[AB]$ tel que, après pliage, la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC).
Étape 4 : effectuer une démarche similaire à partir du sommet B.
Étape 5 : plier les deux triangles supérieurs, l'un devant, l'autre derrière.

Lorsque l'on mesure AD, on obtient 8,7 cm (valeur arrondie au mm).
Quelle est la valeur exacte de la distance AD ?

Réalisation d'un triangle particulier

À partir d'une feuille A4, il s'agit maintenant de réaliser, par pliages successifs, un triangle particulier. Cette feuille est modélisée par un rectangle $ABCD$. E et F désignent respectivement les milieux des segments $[AD]$ et $[BC]$.
Voici le protocole de construction de ce triangle, illustré sur la figure I.9.
Le rectangle de la figure I.10 correspond à la feuille A4 dépliée après avoir réalisé le triangle. On souhaite déterminer la nature du triangle ainsi construit

1. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{GAJ}$ est égale à 60°.
2. Montrer que l'on rabat le point C sur le segment $[AG]$.
3. Montrer que l'on rabat le point B sur le segment $[JG]$.
   Conclure

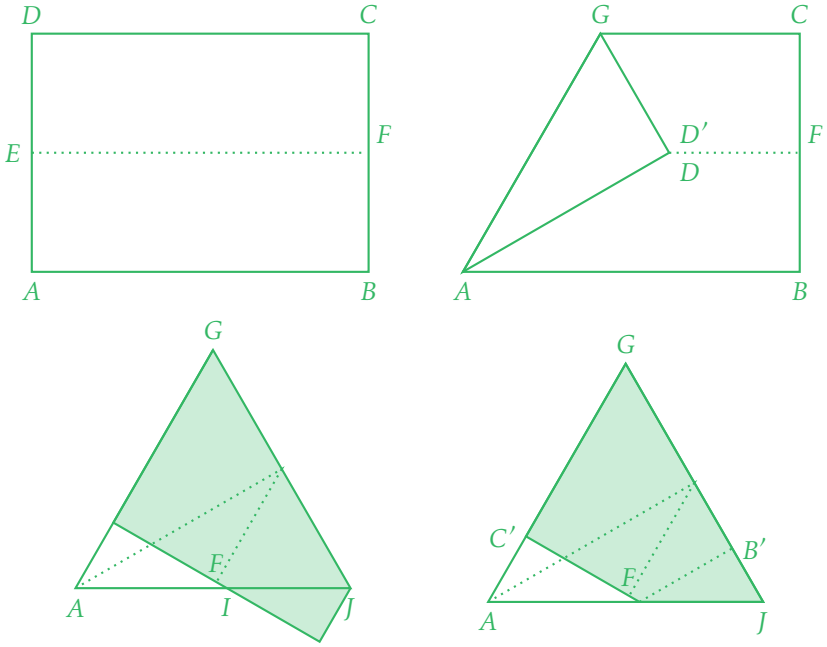


Figure I.9: *toto*

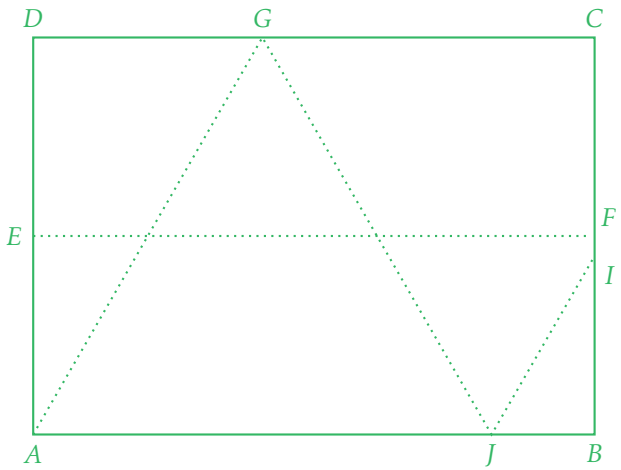


Figure I.10