Corrigé de l'exercice 1.

1. • Pour le point P. L'aiguille est perpendiculaire aux rainures. La distance à la rainure la plus proche est de $0,4$, donc l'aiguille coupe la rainure. C est réalisé.

   • Pour le point Q. La hauteur de l'aiguille au dessus d'une parrallèle est $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} < 0,5$. Donc, l'événement C n'est pas réalisé.

   • De la même manière, pour R l'événement C est réalisé.

   • De la même manière, pour S l'événement C n'est pas réalisé.

2. **a.** Le triangle IAH est rectangle en H, on a donc : $\sin(x) = \frac{AH}{IA}$, donc $AH = \frac{1}{2}\sin(x)$.

   b. L'événement C est donc réalisé, si $y < AH$, donc si $y < \frac{1}{2}\sin(x)$.

3. Sur la figure 1, il y a 10 épingles à cheval sur une rainure. Seul le graphique 1, correspond.

4. f correspond à la fréquence des points, obtenus aléatoirement, en dessous de la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}\sin(x)$.

5. Aire du triangle $OBE = \frac{\pi \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

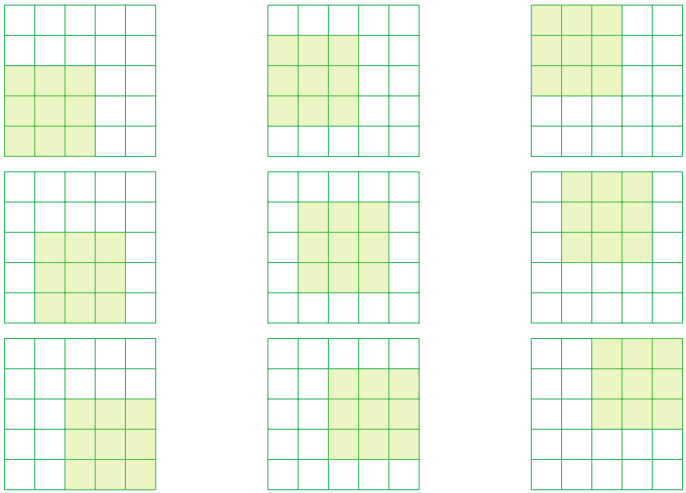
   Aire de la parabole $\frac{4}{3} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$.

   Donc $\frac{1}{4} < P(C) < \frac{1}{3}$.

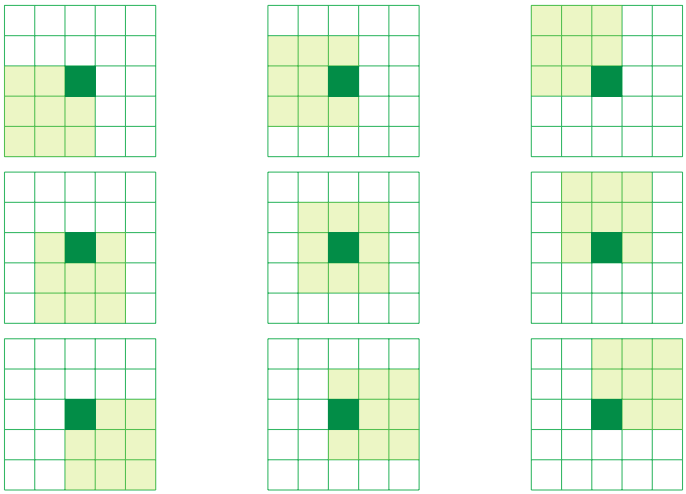
Corrigé de l'exercice 2.

Un cas particulier

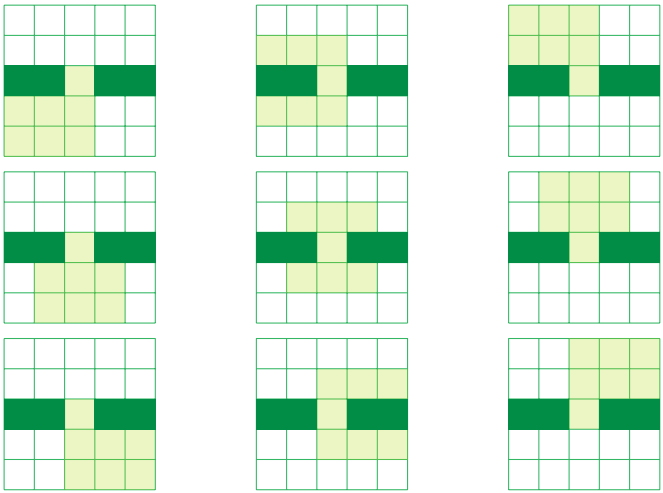
1. Il y a 9 possibilités.



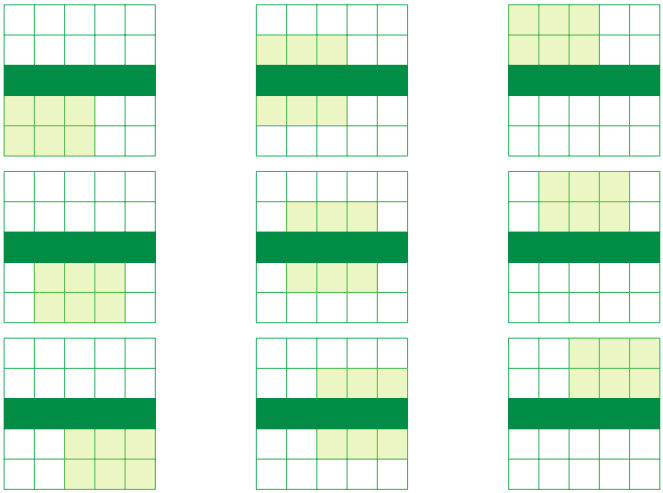
2. En mettant la case noire dans la case centrale, chaque carré C' contient cette case.



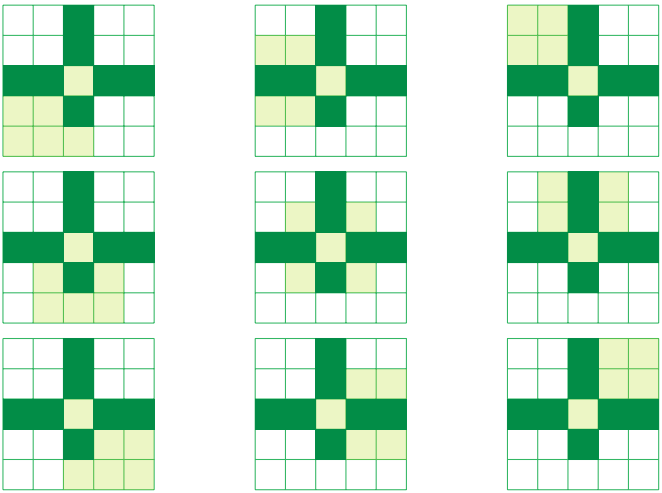
3. **a.** Deux cases.



b. Trois cases.



c. Quatre cases



4. Il suffit d'inverser la couleur des cases dans C'.
5. Pour tout tout nombre p compris entre 0 et 9, on peut colorier p cases en noirs de manière que tout carré C' contienne p cases noires. Les questions 2 et 3, permettent de conclure pour p valant 1, 2, 3 et 4. La question précédente permet de répondre pour p valant 8, 7, 6 et 5. Le cas $p = 0$ est évident, on en déduit le cas $p = 9$.

Généralisation

1. Il n'y a que 9 possibilités. En effet, horizontalement, on ne peut mettre C' que dans 3 position, et 3 horizontalement.
2. Le carré central, de côté $2k - 3$ est contenu dans tous carrés C'.
3. Si p cases sont noires, alors, $(2p + 1)^2 - p$ cases seront blanches. On inverse la couleur des cases.
4. $k = 2$, alors $2k + 1 = 5$ et $2k - 1 = 3$. Cette situtation correspond à la première partie.

   Pour $k = 3$, $2k + 1 = 7$, $2k - 1 = 5$. La question 2, permet de résoudre les cas pour p compris entre 0 et 9, et la question 3, permet de résoudre les cas de 16 et 25.

   Reste donc à résoudre les cas entre 10 et 15. Il faut donc résoudre les cas 10, 11 et 12, voir la figure 2 ; les 3 autres cas se faisant par complémentarité.
5. Montrons que $(2k-1)^2 - (2k-3)^2 \leqslant (2k-3)^2$. On développe $(2k-3)^2 + (2k-3)^2 - (2k-1)^2 = 4k^2 - 12k + 9 + 4k^2 - 12k + 9 - 4k^2 + 4k - 1 = 4k^2 - 20k + 17$.

   On étudie le signe de cette fonction du 2e degré. Son discriminant est : $128 > 0$, elle a donc deux solutions $k_1 = \dfrac{-20 - \sqrt{128}}{8} \approx 1$ et $k_1 = \dfrac{-20 + \sqrt{128}}{8} > 3$. On en déduit que : $(2k-3)^2 + (2k-3)^2 - (2k-1)^2 > 0$, pour $k \geqslant 4$ et donc que $(2k-1)^2 - (2k-3)^2 \leqslant (2k-3)^2$, pour $k \geqslant 4$.

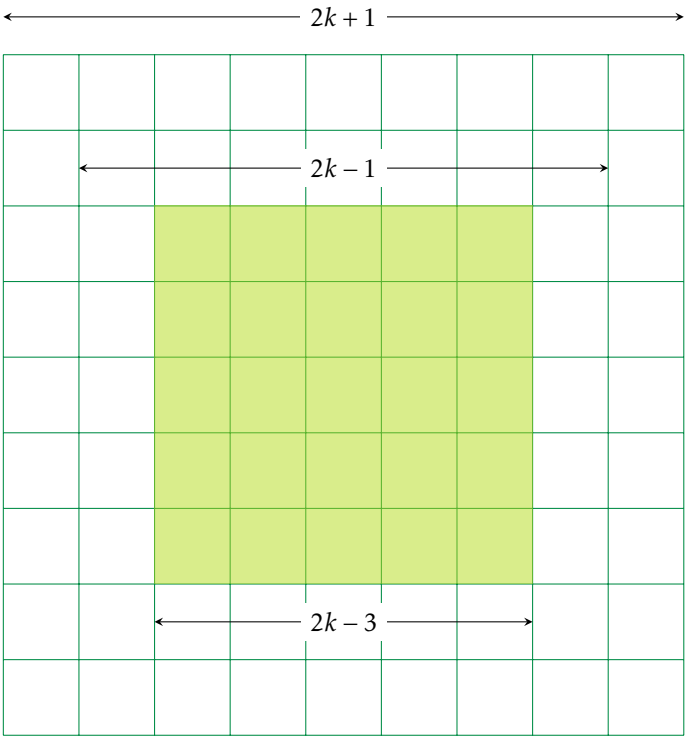
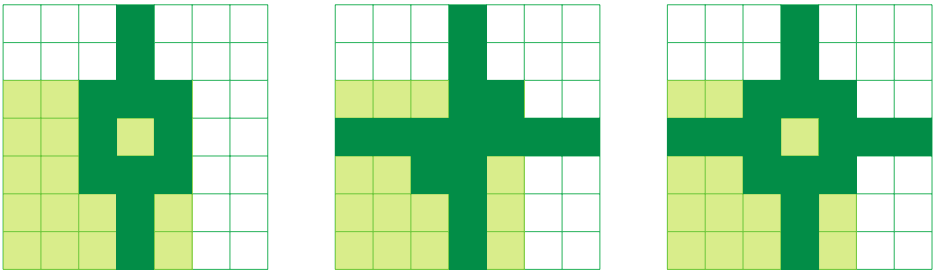


Figure 1



10 carrés 11 carrés 12 carrés

Figure 2

6. Pour $k = 2$ ou $k = 3$, on peut placer p points dans C de telle façon que tout sous caaré C' contiennent exactement p cases noires.
Pour $k \geqslant 4$, les questions 2. et 3. perment de répondre pour $p \leqslant (2k-3)^2$.
La question 5. permet de répondre pour $p = 2k - 1$? ? ? ? ?

Corrigé de l'exercice 3.

Création d'un cornet par pliages

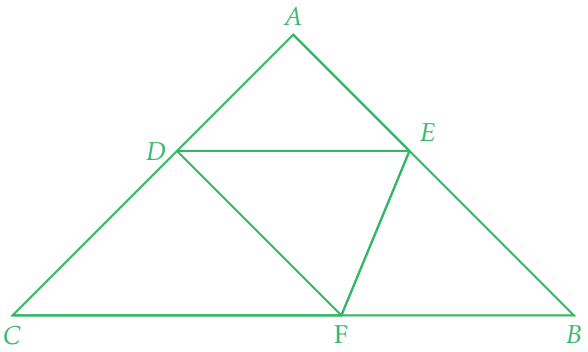


Figure 3

B est envoyé sur D, on en déduit que $BE = ED$. Notons b cette longueur. Notons $a = AD$. On a $a + b = 21$. De plus le triangle CBE est rectangle isocèle, car les droites (DE) et (CB) sont parallèles.
Dans le triangle, on a donc $b = a\sqrt{2}$. On en déduit que $a(1+\sqrt{2}) = 21$, donc :

$$a = \frac{21}{1+\sqrt{2}} = \frac{21(1-\sqrt{21})}{(1-\sqrt{21}(1+\sqrt{21})} = 21(\sqrt{2}-1) \approx 8{,}698\,\text{cm}.$$

Un triangle particulier

1. L'angle $\widehat{AGJ} = 60°$.
On a $AD' = AD = 21\,\text{cm}$, et $AE = D'H$, (H projeté orthogonal sur la droite (AB). On a donc $\sin(\widehat{D'AH} = \dfrac{1}{2}$, soit $D'AH = 30°$.
Par symétrie, les angles $\widehat{GAD}$ et $\widehat{D'AG}$ sont égaux. On a donc $\widehat{D'AG} = \dfrac{90-30}{2} = 30°$. on en déduit que $\widehat{AGJ} = 60°$.

2. La droite (AG) est axe de symétrie du quadrialtère $ADGD'$. Comme $\widehat{DGA} = 60°$, on a $\widehat{AGD'} = 60°$. Donc $\widehat{JGC} = 60°$.
La droite (CJ) est donc axe de symétrie de l'angle $\widehat{AGC}$ et donc C est rabatu sur la droite (GA).

3. Des questions précédentes ont déduit que le triangle AGJ est équilatéral.

Comme (GJ) est axe de symétrie, on en déduit que $\widehat{GJI} = 60°$, puis que $\widehat{IJB} = 60°$. Donc que B est envoyé sur la droite GJ.

On en déduit que le polygone obtenu par pliage bien un triangle équilatéral.