Baccalauréat C Caen juin 1973

Exercice 1

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Un point M se déplace dans ce plan. À la date $t = 0$, où commence le mouvement, le point M est en O et son vecteur vitesse est nul.
À toute date t positive le vecteur accélération du point M a pour coordonnées $(6t\ ;\ 2)$.

1. Donner, en fonction de t, les expressions des coordonnées de M à la date t.
2. Tracer la trajectoire de M et discuter l'existence d'une tangente à cette trajectoire ayant une direction donnée.

Exercice 2

1. Soit $\text{X}_1,\ \text{X}_2,\ \ldots,\ \text{X}_n$, n variables aléatoires réelles définissant un même espace probabilisé $(\Omega,\ \mathscr{B},\ P)$. On les suppose indépendantes et de même loi donnée explicitement par :

$$\forall i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ ,n\} : P\left(\{X_i = 1\}\right) = p, \quad P\left(\{X_i = 0\}\right) = 1 - p$$

   On définit alors une variable aléatoire S telle que :

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{S} = 0 & \text{si toute variable } X_i \text{ est nulle}\\ \text{S} = 1 & \text{si l'une au moins des } n \text{variables aléatoires } X_i \text{ est non nulle.}\end{array}\right.$$

   Déterminer les valeurs de n telles que : $P(\{\text{S} = 0\}) \leqslant 10^{-3}$.
2. Un texte comporte une erreur. On relit ce texte n fois ; à chaque lecture, la probabilité de remarquer cette erreur est $1/2$. Déterminer n de telle sorte qu'on ait une probabilité inférieure à $1/1\,000$ de ne pas avoir remarqué cette erreur après n relectures.

Problème

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On rappelle que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et que 1 et i forment une base de cet espace vectoriel.
Soit α et β deux nombres complexes, on désigne par $F_{\alpha,\ \beta}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$z \longmapsto F_{\alpha,\ \beta}(z) = \alpha z + \beta\overline{z}$$

où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de z.

1.
   a. Montrer que $F_{\alpha,\ \beta}$ est une application linéaire. Soit x et y deux nombres réels, calculer $F_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(x + \text{i}y)$ et $F_{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}(x + \text{i}y)$.

   b. Soit $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}$. On désigne par Φ l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ définie par :

$$(\alpha,\ \beta) \longmapsto F_{\alpha,\ \beta}$$

   Montrer que Φ est injective.

c. On se propose dans cette question de montrer que Φ est aussi surjective. φ étant un endomorphisme de $\mathbb{C}$ dont la matrice dans la base (1, i) est

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Montrer, en calculant $2\varphi(z)$ en fonction de z et de $\overline{z}$, qu'il existe un couple de nombres complexes $(\alpha,\ \beta)$ tel que :

$$\varphi = F_{\alpha,\ \beta}$$

Calculer les nombres réels a, b, c et d en fonction des parties réelles et imaginaires de $\alpha + \beta$ et de $\alpha - \beta$.

2. On définit une application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(z_1,\ z_2) \longmapsto < z_1,\ z_2 > = x_1x_2 + y_1y_2.$$

où on a posé

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$$

x_1, x_2, y_1 et y_2 étant des nombres réels.

a. Montrer que pour tout nombre complexe z on a :

$$< z,\ z > = z\overline{z} = |z|^2$$

où $|z|$ désigne le module de z. Montrer que pour tout couple de nombres $(z_1\ ;\ z_2)$ de complexes on a :

$$< z_1,\ z_2 > = \frac{1}{2}\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right).$$

b. Montrer que <, > est un produit scalaire. Quelle interprétation peut-on donner de la norme associée à ce produit scalaire ? Montrer que $\mathbb{C}$ muni de ce produit scalaire est un plan vectoriel euclidien dont 1 et i forment une base orthonormée.

c. On désigne par m et n les images respectives de 1 et i par l'application $F_{\alpha,\ \beta}$.

Montrer que m et n sont orthogonaux si et seulement si :

$$\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta = 0.$$

Montrer que m et n sont tous les deux unitaires si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & = & 1 \\ \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta & = & 0 \end{array}\right.$$

En déduire que $F_{\alpha,\ \beta}$ est une isométrie vectorielle si et seulement si

$$|\alpha| = 1 \quad \text{et} \quad \beta = 0 \quad \text{ou } \alpha = 0 \quad \text{et } |\beta| = 1$$

Écrire dans· chacun de ces cas les matrices associées à $F_{\alpha,\ \beta}$ dans la base (1, i) ; (on rappelle qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ où θ est un nombre réel). Définir géométriquement les isométries obtenues en précisant leurs éléments. Étudier en particulier $F_{\mathrm{i},\ 0}$ et $F_{0,\ -1}$.

3. Soit P un espace affine euclidien associé au plan vectoriel euclidien précédent. P est rapporté au repère d'origine O, de base (1, i). Soit M un point de P, on appelle affixe de M le vecteur z, élément de $\mathbb{C}$, défini par :

$$z = \overrightarrow{\mathrm{O}M}$$

a. Soit f l'application affine de P dans P telle que le point I d'affixe z_0 soit invariant par f et telle que l'endomorphisme associé $F_{\alpha,\,\beta}$ soit tel que :

$$|\alpha| = 1 \quad \text{et} \quad \beta = 0$$

z' étant l'affixe de $M' = f(M)$, montrer que :

$$z' = \alpha z + (1-\alpha)z_0.$$

Vérifier que I est le seul point invariant de f excepté pour une valeur de α.

Préciser alors l'application f correspondante.

b. f_1 étant l'application affine de P dans P associée à $F_{\alpha_1,\,0}$ avec $|\alpha_i| = 1$, et de point invariant I_1 ; f_2 étant l'application affine de P dans P associée à $F_{\alpha_2,\,0}$ avec $|\alpha_2| = 1$, et de point invariant I_2, à quel endomorphisme $F_{\alpha,\,\beta}$ est associé $f_2 \circ f_1$? Déterminer les points invariants de $f_2 \circ f_1$.