Baccalauréat C Caen septembre 1970

EXERCICE 1

Reconnaître géométriquement et préciser les éléments de la transformation $\mathcal{T}$ qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe

$$z' = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z + 3.$$

EXERCICE 2

Soit la fonction

$$f : x \longmapsto y = x^2 \text{Log}\, x - \frac{x^2}{2}.$$

Étudier les limites de y et de $\dfrac{y}{x}$ quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$.
Calculer la dérivée de f, trouver le sens de variation de f et tracer son graphe (C) dans un repère orthonormé.
Calculer la dérivée de

$$y = \frac{x^3}{3}\text{Log}\, x - \frac{5x^2}{18}.$$

En déduire l'aire du domaine limité par l'axe $x'x$, la droite $x = \lambda$ $\left(0 < \lambda < \sqrt{\mathrm{e}}\right)$ et l'arc du graphe (C) situé au-dessous de l'axe $x'x$.
Calculer la limite de cette aire lorsque λ tend vers 0.

PROBLÈME

Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé $x\mathrm{O}y$, on considère la transformation ponctuelle qui, à un point M de coordonnées x et y, fait correspondre le point M' de coordonnées x' et y'.
La transformation est définie par les relations

$$\mathrm{O}M\,.\,\mathrm{O}M' = a^2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{A}M} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{A}M'} \text{ sont colinéaires,}$$

où a est une constante strictement positive et où le point A a pour coordonnées $-a$ et 0.
Soit (E) le plan (P) privé de la droite $x = -a$.
Dans tout le problème, on supposera que le point M appartient à (E).

1. Que représente le produit $\mathrm{O}M\,.\,\mathrm{O}M'$ pour le cercle (Γ) de diamètre MM' ? Que peut-on dire du cercle (Γ) et du cercle dont le centre est O et le rayon a ?
   Si M décrit une droite fixe (Δ) passant par A, montrer que les cercles de diamètre MM' appartiennent à un faisceau. Quelle est la nature de ce faisceau ? Quel est son axe radical ?
2. Établir les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} xx' + yy' &=& a^2,\\ y'(a + x) &=& y\left(a + x'\right). \end{array}\right.$$

   Calculer x' et y' en fonction de x, y et a.
   En déduire, sans nouveau calcul, x et y en fonction de x', y' et a.

Déterminer le sous-ensemble (E′) des points M de (E) qui admettent un transformé. Vérification géométrique.

Montrer que la transformation est involutive sur (E′). Déterminer les points doubles de cette transformation.

3. On suppose que le point M décrit la droite d'équation $x = a$. Quel est l'ensemble décrit par le point M′ ? Préciser les éléments géométriques de cet ensemble.

4. Le point M décrit la droite d'équation $x = \dfrac{a}{u-1}$ où u est un paramètre différent de 0 et de 1, positif ou négatif.

Quel est l'ensemble décrit par le point M' ? Discuter la nature de cet ensemble suivant la valeur de u.

5. Construire les ensembles correspondant aux valeurs suivantes de u :

$$u = 4, \quad u = \frac{1}{4}, \quad \text{et } u = -1.$$