

## œ Baccalauréat C Caen juin 1971 œ

### EXERCICE 1

Résoudre dans le corps des nombres réels l'équation

$$e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0,$$

où  $e$  est la base des logarithmes népériens et où  $x$  est l'inconnue.

### EXERCICE 2

Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation

$$z^6 + (1 - 2i)z^3 - 2i = 0,$$

où  $i$  est la racine de  $-1$  d'argument  $\frac{\pi}{2}$  et où  $z$  est l'inconnue (on posera  $z^3 = Z$ ).

### PROBLÈME

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , d'axes  $x'Ox$  et  $y'Oy$ , le point  $A$  de coordonnées  $(+2; 0)$  et la droite  $(D)$  d'équation

$$x - y = 0.$$

$\lambda$  étant un paramètre réel, on désigne par  $(C_\lambda)$  le cercle variable passant par  $O$  et  $A$  et dont le centre a pour ordonnée  $\lambda$ . Ce cercle recoupe  $y'Oy$  en  $M$  et la droite  $(D)$  en  $M'$ .

À chaque cercle  $(C_\lambda)$  est associée la droite  $(\Delta_\lambda)$  définie par les points  $M$  et  $M'$ .

**1.** Former l'équation générale des cercles  $(C_\lambda)$ .

On considère l'application,  $s$ , de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}_+$  (où  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des réels et  $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des réels positifs ou nuls) qui, à chaque valeur de  $\lambda$ , fait correspondre l'aire (arithmétique)  $s(\lambda)$  du triangle  $OMM'$  (ces trois points pouvant être distincts ou confondus).

Calculer  $s(\lambda)$ . Étudier et représenter graphiquement la fonction  $s$ . Pour quelles valeurs de  $\lambda$  l'aire  $s(\lambda)$  est-elle nulle?

La fonction  $s$  est-elle continue pour ces valeurs? Est-elle dérivable pour ces valeurs?

Préciser les cercles  $(C_\lambda)$  correspondants et les droites  $(\Delta_\lambda)$  associées.

**2.** Quelle relation  $\lambda$  et  $\lambda'$  doivent-ils vérifier pour que les cercles  $(C_\lambda)$  et  $(C_{\lambda'})$  soient orthogonaux? Montrer que les droites associées  $(\Delta_\lambda)$  et  $(\Delta_{\lambda'})$  sont perpendiculaires.

**3.** Soit l'inversion de pôle  $A$  et de puissance 4.

Indiquer avec précision les transformées des droites  $y'Oy$  et  $(D)$  dans cette inversion.

On appelle  $m$  et  $m'$  les inverses de  $M$  et de  $M'$ . Montrer que  $O$ ,  $m$  et  $m'$  sont alignés. Écrire l'équation de la droite  $Omm'$ .

Calculer, en fonction de  $\lambda$ , les coordonnées de  $m$  et de  $m'$ . Montrer que le lieu du milieu,  $n$ , de  $mm'$  est le cercle  $(C_{\frac{1}{2}})$ .

**4.** Soit la courbe  $(P)$  d'équation

$$(x + y)^2 - 12x + 4y + 4 = 0.$$

Trouver l'équation de cette courbe dans le repère  $(\omega, \vec{I}, \vec{J})$ , d'axes  $X'\omega X$  et  $Y'\omega Y$ , défini de la manière suivante :

$\omega$  est le point de coordonnées  $(+1; +1)$ ,  $\vec{I} = \vec{\omega A}$  et  $\vec{J}$  est le vecteur qui se déduit de  $\vec{I}$  dans la rotation de centre  $\omega$  et d'angle  $+\frac{\pi}{2}$ .

Pour cela, on établira les formules de changement de repère suivantes :

$$\begin{cases} x &= 1 + X + Y, \\ y &= 1 - X + Y. \end{cases}$$

Montrer que la courbe (P) est une parabole, dont on précisera le sommet et l'axe.

Montrer que pour tout  $\lambda$  la droite  $(\Delta_\lambda)$  est tangente à (P) et que, réciproquement, toute tangente à (P) est une droite  $(\Delta_\lambda)$ . Calculer les coordonnées, dans le nouveau repère, du point de contact de  $(\Delta_\lambda)$  avec (P).