

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C Caen juin 1972 ☞

EXERCICE 1

Soit  $f$  la fonction, de  $]0; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par

$$f(x) = \frac{x \operatorname{Log} x}{x-1}, \quad \text{pour } x \neq 1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue dans  $]0; +\infty[$ ?

Calculer  $f'(x)$  pour  $x = f.1$ .

2. Soit  $g$  la fonction de  $]0; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par

$$g(x) = x - 1 - \operatorname{Log} x.$$

Étudier le sens de variation de  $g$ ; en déduire le signe de  $g(x)$  et le sens de variation de  $f$ .

EXERCICE 2

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels donnés. On se propose de déterminer l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z}, \\ x \equiv a \pmod{9}, \\ x \equiv b \pmod{11}. \end{cases}$$

1. Démontrer que toutes les solutions sont congrues à un même nombre modulo 99. (On pourra utiliser l'identité de Bezout.)

2. Déterminer l'ensemble des solutions du système.

PROBLÈME

Soit  $(E)$  un plan affine rapporté à un repère cartésien  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'axes  $Ox$  et  $Oy$ . Il a pour espace vectoriel associé le plan vectoriel  $\mathbb{R}^2$ . Soit deux points distincts de  $(E)$ ,  $M$  de coordonnées  $(a, b)$  et  $M'$  de coordonnées  $(a', b')$ . On désigne par  $P$  et  $P'$  les projections respectives de  $M$  et de  $M'$  sur  $Ox$  parallèlement à  $Oy$ , par  $Q$  et  $Q'$  les projections respectives de  $M$  et  $M'$  sur  $Oy$  parallèlement à  $Ox$ .

1. a. On suppose d'abord que les vecteurs  $\overrightarrow{PQ'}$  et  $\overrightarrow{P'Q}$  sont non nuls. Écrire, en fonction de  $a, b, a'$  et  $b'$ , les équations des trois droites  $PQ', P'Q$  et  $MM'$ . Démontrer que ces trois droites sont, soit parallèles, soit concourantes.

b. Dans le cas où le vecteur  $\overrightarrow{PQ'}$  est nul, quelle est la position relative des deux droites  $P'Q$  et  $MM'$ ?

Examiner aussi le cas où le vecteur  $\overrightarrow{P'Q}$  est nul.

2. Soit un réel,  $\alpha$ , non nul et le vecteur  $\vec{t} + \vec{i} = \alpha \vec{j}$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante (liant  $a, b, a', b'$  et  $\alpha$ ) pour que les trois vecteurs  $\overrightarrow{PQ'}, \overrightarrow{P'Q}$  et  $\overrightarrow{MM'}$  soient colinéaires à  $\vec{t}$ .

Démontrer que la condition précédente définit une application  $f_\alpha$  de  $(E)$  dans  $(E)$ , telle que

$$\begin{cases} f_\alpha(M) = M' & \text{pour } M \neq O \\ f_\alpha(O) = O. \end{cases}$$

Démontrer que  $f_\alpha$  est affine et involutive.

Démontrer que  $f_\alpha$  est une symétrie, dont on précisera les éléments.

3. Soit  $\varphi_\alpha$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  associée à  $f_\alpha$ . Écrire la matrice de  $\varphi_\alpha$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\Phi$  l'ensemble des applications  $f_\alpha$  telles que  $\alpha$  appartienne à l'ensemble des réels non nuls.

Soit  $x$  et  $y$  deux réels non nuls, calculer les matrices de  $\varphi_\beta \circ \varphi_\gamma$  et de  $\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Dans quel cas ces deux matrices sont-elles égales?

Soit  $\delta$  un réel non nul. Démontrer que  $\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\delta$  appartient à  $\Phi$ .

Démontrer que le composé d'un nombre impair d'éléments de  $\Phi$  est un élément de  $\Phi$ .