Durée : 4 heures

ᔕ Baccalauréat C juin 1974 Caen ᔓ

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$-\mathrm{i}z^2 + (2+2\mathrm{i})z + (10+5\mathrm{i}) = 0$$

EXERCICE 2

Dans un espace affine E rapporté à un repère cartésien $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$, on définit une application f de E dans E par la condition suivante : le point M de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ a pour image le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ données par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& -z+2\\ y' &=& -x+1\\ z' &=& y-1\end{array}\right.$$

Montrer que f est un vissage dont on déterminera l'axe.

PROBLÈME

Dans tout le problème, Log x désigne le logarithme népérien de x et, si f est une fonction réelle dérivable, f' désigne la fonction dérivée de f.

Partie A

1. Comment choisir les constantes réelles a, b et c pour que le polynôme $P~:~x \longmapsto P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie l'équation

$$xP'(x) - 2P(x) = 0$$

pour tout x réel ?

2. Soit f une fonction dérivable de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}.$$

Vérifier que g est dérivable en tout point x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et démontrer que, pour que f vérifie

$$(1) \qquad xf'(x) - 2f(x) = \text{Log}\,x$$

pour tout x réel > 0, il faut et il suffit que g soit une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}\,x}{x^3}$.

3. Quel est l'ensemble des primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}\,x}{x^3}$? (On pourra faire une intégration par parties).

4. En déduire que l'ensemble des fonctions dérivables de $]0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) pour tout $x > 0$ est l'ensemble des fonctions

$$x \longmapsto -\frac{1+\mathrm{Log}\left(x^2\right)}{4} + ax^2$$

où a désigne une constante réelle arbitraire.

5. On désigne par φ la fonction :

$$x \longmapsto -\frac{1+\mathrm{Log}\left(x^2\right)}{4} + \frac{1}{4}x^2 \quad \text{où } x \in]0\ ;\ +\infty[$$

Étudier les variations de φ et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Partie B

1. Soit λ un nombre réel strictement positif. Calculer en fonction de λ l'intégrale

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(les primitives de la fonction logarithme népérien peuvent s'obtenir au moyen d'une intégration par parties).

2. Montrer que, lorsque λ tend vers 0, $I(\lambda)$ admet une limite égale à $\dfrac{1}{3}$.

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et pour tout x tel que $\dfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{k+1}{n}$, on a

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) < I\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$

En déduire :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$$

(On pourra aider le raisonnement par une interprétation géométrique).

4. Déduire des questions 2. et 3. que, lorsque n tend vers l'infini,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

admet une limite. La calculer.

5. **a.** Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + \frac{1}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Log}\left(\frac{n}{k}\right)\right] - \frac{1}{4}.$$

b. Établir les égalités :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \text{Log}\left(\frac{n}{k}\right) = \text{Log}\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

c. Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites

$$n \longmapsto v_n = \frac{1}{n}\text{Log}\left(\frac{n^n}{n!}\right) \quad \text{et} \quad n \longmapsto u_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

ont des limites lorsque n tend vers l'infini. Calculer ces limites.