Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Caen

EXERCICE 1

On considère l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + (2\mathrm{i} - 5)z^2 + 7(1 - \mathrm{i})z - 2 + 6\mathrm{i} = 0.$$

1. Démontrer qu'elle admet une racine réelle que l'on calculera.
2. Résoudre ensuite l'équation dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 2

L'espace vectoriel euclidien E est rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$.

1. Soit s_1 la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan vectoriel P_1 d'équation $x + y - 2z = 0$.
   Connaissant les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ d'un vecteur $\vec{v}$ de E, calculer les coordonnées $\left(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1\right)$ de son image $s_1\left(\vec{v}\right)$.
2. Soit r l'endomorphisme de l'espace vectoriel E défini par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} r\left(\vec{\imath}\right) & = & \vec{\jmath}\\ r\left(\vec{\jmath}\right) & = & \vec{k}\\ r\left(\vec{k}\right) & = & \vec{\imath} \end{array}\right.$$

   Démontrer que r est une rotation vectorielle, déterminer l'axe et la mesure de l'angle de cette rotation.
   Démontrer qu'il existe une symétrie vectorielle orthogonale s_2 par rapport à un plan vectoriel P_2 telle que $s_2 \circ s_1 = r$; donner une équation cartésienne de P_2.

PROBLÈME

Partie A

1. Soit g l'application de $]0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x + 1 - \text{Log}\,x$$

   où Log x désigne le logarithme népérien de x.
   Étudier son sens de variation et en déduire que, pour x strictement positif, $g(x)$ est strictement positif.
2. Soit h l'application de $]0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\text{Log}\,x.$$

a. Étudier les variations de la fonction h et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan affine euclidien (P) rapporté à un repère orthonormé.
$\left(\text{On remarquera que } h'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}\right)$

b. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ (e désigne la base des logarithmes népériens).

Partie B

Soit f l'application de $[0~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \mathrm{e}^{h(x)} \quad \text{pour } x \neq 0\\ f(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Cette fonction est-elle continue sur $[0~;~+\infty[$? Est-elle dérivable sur $[0~;~+\infty[$?
2. Démontrer que :

$$\frac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\mathrm{Log}\, x} \quad \text{pour } x > 0.$$

3. Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Démontrer que pour x strictement positif et différent de 1 : OZ Logx e

$$\frac{f(x) - x}{\mathrm{Log}\, x} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\mathrm{Log}\, x} - 1}{\frac{1}{x}\mathrm{Log}\, x}.$$

Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x) - x}{\mathrm{Log}\, x}$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$; quelle est cette limite ?

La fonction $x \longmapsto f(x) - x$ admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?

4. Étudier le sens de variation de la fonction f et montrer que f est une bijection de $[0~;~+\infty[$ sur lui-même.

Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ et $f(2)$ et tracer la courbe représentative Γ de la fonction f. On indiquera la tangente en O et on précisera la branche infinie.

Soit A le point de Γ d'abscisse 1. Écrire l'équation de la tangente en A à Γ.

Montrer que $f''(1) = 0$. (On admettra que le point A est un point d'inflexion pour Γ, c'est-à-dire un point où la courbe traverse sa tangente).

Partie C

Un point mobile M du plan affine euclidien (P) a, dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ de (P), à chaque instant t strictement positif, des coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & f(t)\\ y & = & g(t) \end{array}\right.$$

f et g étant les fonctions définies dans les questions précédentes.

1. Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$:

$$y = \left(g \circ f^{-1}\right)(x).$$

2. Construire la trajectoire de M lorsque t décrit l'intervalle $\left[\frac{1}{2}~;~2\right]$.

Préciser le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M à la date $t = 1$ et les vecteurs vitesses aux dates $t = \frac{1}{2}$ et $t = 2$.