∽ Baccalauréat C Caen juin 1976 ∾

EXERCICE 1

On considère l'équation :

$$(1) \qquad 324x - 245y = 7 \quad (x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$$

1. Montrer que pour toute solution $(x\ ;\ y)$, x est multiple de 7.
2. Déterminer une solution $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ et en déduire toutes les solutions.
3. Soit δ le PGCD des éléments d'un couple $(x\ ;\ y)$ solution de (1). Quelles sont les valeurs possibles de ?? Déterminer les solutions de (1) telles que x et y soient premiers entre eux.

EXERCICE 2

Le plan euclidien orienté P est rapporté à un repère orthonormé. Soit $z = x + \text{i}y$ l'affixe d'un point $M(x\ ;\ y)$ de ce plan.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan P tels que :

$$|(1-\text{i})z + 2\text{i}| = 2$$

2. Étudier la transformation de P qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe

$$z' = (1-\text{i})z + 2\text{i}i.$$

3. En utilisant la transformation précédente, retrouver le résultat du 1.

PROBLÈME

Soit P un plan affine euclidien et $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de ce plan.

Partie A

Construire la courbe Γ d'équation :

$$4y^2 - x^2 = 4$$

Partie B

On donne les points :

$$\text{A}(0\ ;\ 1) \quad \text{B}(-2\ ;\ 1) \quad \text{A}'(-1\ ;\ 3) \quad \text{B}'(-2\ ;\ 2)$$

1. Montrer qu'il existe une bijection affine unique g telle que :

$$g(\text{O}) = \text{B}, \quad g(\text{A}) = \text{A}', \quad g(\text{B}) = \text{B}'$$

Soit C le symétrique de B par rapport à A. Définir sans calcul le point $\text{C}' = g(\text{C})$ et les images par g des droites OB et OC.

2. Déterminer les coordonnées de A′ dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right)$. En déduire un système de coefficients réels $(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$ tels que $\alpha+\beta+\gamma=1$ et que A′ soit barycentre des points (O, A, B) affectés des coefficients respectifs $(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$.
3. Donner la matrice, dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, de l'endomorphisme f associé à g et l'expression analytique de g. Donner les coordonnées dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du barycentre des points B, A′, B′ affectés respectivement des coefficients
$(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$.
4. Montrer que léquation cartésienne de la courbe Γ' image de Γ par g est :

$$y=\frac{3}{2}x+4+\frac{1}{2(x+2)}.$$

Construire cette courbe, montrer que B′C′ est tangente à Γ' et préciser le point de contact.

Partie C

Soit D la droite d'équation $x=-2$ et D' la droite d'équation $y=\dfrac{3}{2}x+4$.

1. Définir analytiquement la symétrie S par rapport à D suivant D'.
2. Montrer que l'application $g^{-1}\circ S\circ g$ est une involution affine. Trouver $g^{-1}\circ S\circ g(\text{O})$, $g^{-1}\circ S\circ g(\text{B})$, $g^{-1}\circ S\circ g(\text{C})$ et en déduire la nature de $g^{-1}\circ S\circ g$.

Partie D

On considère la partie de P limitée par la courbe Γ', la droite D', les droites d'équation $x=-3$ et $x=m$, m étant un paramètre réel inférieur strictement à -2.

1. Calculer l'aire arithmétique $\sum(m)$ de ce domaine.
2. Étudier la fonction $\begin{array}{llll}\sum : &]-\infty\ ;\ -2[& \to & \mathbb{R}\\ & m & \longmapsto & \sum(m)\end{array}$

   et construire sa courbe représentative.
3. Soit h l'application $\begin{array}{lll}[-3\ ;\ -2[& \to \mathbb{R}_+ & \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{2}\text{Log}(-x-2)\end{array}$

   Montrer que c'est une bijection et définir la bijection réciproque h^{-1}. En tracer la courbe représentative sur le même dessin que la courbe de $\sum$.
4. Définir la fonction $h^{-1}\circ\sum$.