∽ Baccalauréat C Caen juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 210.
2. Si x et y sont deux entiers naturels non nuls, Δ leur plus grand diviseur commun, μ leur plus petit multiple commun, déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\, y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\mu & = & 210\,.\,\Delta\\ y-x & = & \Delta.\end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$4z^3 - 6\mathrm{i}\sqrt{3}z^2 - 3(3+\mathrm{i}\sqrt{3})z - 4 = 0.$$

1. Démontrer que cette équation admet une racine réelle. En déduire les solutions, dont on donnera la forme trigonométrique.
2. Démontrer que ces racines sont les éléments d'une suite géométrique dont on donnera la raison complexe.

PROBLÈME **12 POINTS**

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Partie A

1. Soit D l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
2. **a.** Soit f appartenant à D. On pose :

$$h :\quad \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & h(x) = f(x).\mathrm{e}^{-x}\end{array}$$

   Montrer que h appartient à D et que si $f' = f$, alors h est une application constante.
   En déduire l'ensemble F_1 des fonctions f de D telles que $f' = f$.

   b. De même, en posant $k(x) = f(x)\mathrm{e}^{x}$,déterminer l'ensemble F_2 des fonctions $f$de D telles que $f' = -f$.

Partie B

1. Soit F le sous-espace vectoriel de D engendré par f_1 et f_2 telles que :

$$f_1 : x \longmapsto \cos x \quad \text{et} \quad f_2 : x \longmapsto \sin x.$$

   Démontrer que f_1 et f_2 forment une base de F et que leurs fonctions dérivées f_1' et f_2' appartiennent à F.

2. Plus généralement, on désigne par g_1 et g_2 deux éléments de D linéairement indépendants tels que le plan vectoriel G de base $\left(g_1,\ g_2\right)$ contienne g_1' et g' fonctions dérivées de g_1 et g_2 respectivement.

   Démontrer que, pour toute fonction f de G, f' est élément de G et que l'application Φ de G dans G définie par $\Phi(f) = f'$ est un endomorphisme de G.

   Déterminer son noyau. Démontrer que cette application est bijective si et seulement si G ne contient pas la fonction constante f_0 définie sur $\mathbb{R}$, par $f_0(x) = 1$.

3. Soit φ l'endomorphisme de G ayant pour matrice dans la base $\left(g_1,\ g_2\right)$:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   Démontrer que φ est involutif. En déduire une nouvelle base $\mathscr{B}$ de G laquelle la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Partie C

‘

1. Déduire des questions précédentes que l'on peut choisir les fonctions g_1 et g_2 de façon que $\varphi = \Phi$ (on utilisera la base $\mathscr{B}$).
2. Si l'on suppose, de plus, que $g_1(0) = g_2(0) = 1$, montrer que l'on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g_1(x) = \frac{4\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{3} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \frac{2\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{3}.$$

   Dans les questions suivantes, g_1 et g_2 sont les fonctions ainsi définies.

3. Étudier les variations des fonctions g_1 et g_2. Tracer, dans un plan rapporté à un repère orthonormé, leurs courbes représentatives (C_1) et (C_2).
4. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par les courbes (C_1), (C_2) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}^{\star}$).
5. Montrer, à l'aide de l'application φ, que toute fonction f appartenant à G telle que $f = ag_1 + bg_2$ admet une primitive θ et une seule dans G.

   Donner les coordonnées de θ dans la base $\left(g_1,\ g_2\right)$.