Baccalauréat C Caen juin 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Trouver, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8.
2. Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $3^n \cdot n - 9n + 2$ soit divisible par 8 ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans un plan affine euclidien P, on donne un triangle ABC rectangle en A, tel que $d(\text{A, C}) = 2d(\text{A, B}) = 2a$ où a est un nombre réel positif donné et $d(\text{A, C})$ désigne la distance des points A et C.

1. Déterminer et construire le point C barycentre du système de points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, −2 et 1.

   Déterminer et construire le point K barycentre du système de points A, B et C affectés respectivement des coefficients −2, 3 et 3.
2. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M tels que

$$4 \cdot \left\| 2\overrightarrow{M\text{A}} - 2\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} \right\| = \left\| -2\overrightarrow{M\text{A}} + 3\overrightarrow{M\text{B}} + 3\overrightarrow{M\text{C}} \right\|$$

   Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M tels que

$$2M\text{A}^2 - 2M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = -5a^2$$

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit m un réel quelconque. On précise que pour tout x strictement positif, la notation x^m désigne $\text{e}^m \log x$ où $\log x$ représente le logarithme népérien de x.
$\mathbb{R}_+^\star$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des nombres réels différents de zéro.
Les parties B et C suivantes sont indépendantes.

Partie A

1. À tout réel m, on associe la fonction f_m de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}_+^\star$ définie par

$$f_m(x) = x^m.$$

   Étudier, suivant les différentes valeurs de m, les variations de cette fonction. On appelle $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1.
2. Construire sur une même figure $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
3. Montrer que pour $m \neq 0$ la fonction f_m possède une fonction réciproque égale à $f_{\frac{1}{m}}$. Montrer qu'il existe une application affine du plan qui transforme la courbe $\mathscr{C}_m$ en $\mathscr{C}_{\frac{1}{m}}$.

Partie B

À tout réel m on associe la fonction g_m de $\mathbb{R}^\star$ vers $\mathbb{R}_+^\star$ définie par :

$$g_m(x) = \text{e}^{m|\log|x||}.$$

1. Montrer que g_m est paire,
2. Déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}$. tel que les restrictions de g_m et de f_m à I soient égales.
3. Étudier, suivant les différentes valeurs de m, les variations de la fonction g_m.
4. g_m est-elle continue en $x = 1$? Est-elle dérivable en ce point ?
5. Donner, sur des figures différentes, dans des plans rapportés à des repères orthonormés, les allures des courbes représentatives des fonctions g_{-1}, $g_{-\frac{1}{2}}$, g_0, $g_{\frac{1}{2}}$, g_1 et g_2.
6. Comparer, pour tout x réel non nul, $g_m\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $g_m(x)$.

Partie B

On oriente le plan affine euclidien P en considérant que le repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ est direct. Soit V le plan vectoriel euclidien orienté associé. Soit m un nombre réel non nul et ψ_m l'endomorphisme de V défini par sa matrice A_m dans la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$:

$$A_m = \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2} \\ \dfrac{2m}{1+m^2} & \dfrac{m^2-1}{1+m^2} \end{pmatrix}$$

Soit F_m l'application affine de P associée à Ψ_m et qui laisse le point J de coordonnées (1 ; 1) invariant.

1. Montrer que Ψ_m est involutive.
2. Quelle est la nature de l'application F_m ? Préciser ses éléments caractéristiques,
3. Soit Γ_m l'image de C_m par l'application F_m (C_m est la courbe définie, en A 1.).
   Montrer qu'il existe une rotation R_m telle que Γ_m soit l'image de $\text{C}_{\frac{1}{m}}$ par la rotation (on pourra utiliser le résultat de A 3.).
   Quel est le centre de cette rotation ?
4. Soit θ_m l'angle de la rotation R_m. Déterminer tg θ_m en fonction de m.