∽ Baccalauréat C Caen juin 1981 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

P est un plan affine muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ et f l'application affine de P dans P qui, à tout point M de coordonnées x et y, associe le point M' de coordonnées x' et y' telles que

$$x' = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \quad ; \quad y' = -\frac{2}{2}x + \frac{5}{3}y - \frac{2}{3}.$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{J}$ des points invariants par f.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à une direction fixe.
3. Montrer que l'on peut trouver un couple $(\alpha\,;\,\alpha')$ de réels vérifiant
   $\alpha + \alpha' = 1$, tel que, pour tout point M, le barycentre du système $\{M,\ \alpha)\left(M',\ \alpha'\right)\}$ soit invariant par f.
   En déduire une construction simple de l'image par f d'un point M quelconque.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Deux entiers naturels a et b s'écrivent dans le système de numération de base n (n entier naturel supérieur ou égal à 6).

$$a = \overline{2310}, \qquad b = \overline{252}.$$

On désigne leur plus grand commun diviseur par d.

1. Démontrer que $(2n+1)$ divise a et b et que $d = 2(2n+1)$ ou $d = 2n+1$ suivant que n est pair ou impair.
2. On prend $n = 6$; résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $ax + by = -26$.

PROBLÈME **13 POINTS**

P est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $R\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. (unité : 4 cm.
C_a est la représentation graphique dans le repère R de la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \frac{a^2\mathrm{e}^x}{a^2 + \mathrm{e}^{2x}}.$$

a est un nombre réel strictement supérieur à 0.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f_1.
   Montrer que la courbe C_1 a un axe de symétrie. Construire C_1.
2. Soit g l'application de l'intervalle $\left]0,\ ;\ +\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \log(\tan x)$.
   Montrer que g est bijective. Soit h l'application réciproque de Montrer que h est dérivable et que sa fonction dérivée h' est égale à f_1.
3. Soit $S(x)$ l'aire de la partie du plan P limitée par la courbe C_1 l'axe des abscisses et les parallèles à l'axe des ordonnées d'abscisses respectives x et $-x$ $(x > 0)$.
   Exprimer $S(x)$ à l'aide de la fonction h. Trouver la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie B

Soit φ_a l'application de P dans P qui, à tout point M de coordonnées x et y, associe le point M' de coordonnées x' et y' telles que

$$x' = x + \log a, \qquad y' = ay \quad (a \in \mathbb{R}_+^{\star}).$$

1. Montrer que l'image de la courbe C_1 par φ_a est la courbe C_a.
2. Vérifier que φ_a est bijective et étudier l'application $\varphi_a \circ s \circ \varphi_a^{-1}$ où s désigne la symétrie orthogonale relativement à l'axe des ordonnées du repère R.

   Déduire de cette étude que C_a a un axe de symétrie.
3. Donner le tableau de variation de f_a. On appelle S_a le point de C_a d'ordonnée maximum. Quel est l'ensemble des points S_a lorsque a décrit $\mathbb{R}_+^{\star}$?
4. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications φ_a lorsque a décrit $\mathbb{R}_+^{\star}$.

   Montrer que $\mathscr{F}$, muni de la loi de composition des applications, est un groupe isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^{\star}$.

   Soit a_1 et a_2 deux réels de $\mathbb{R}_+^{\star}$, montrer qu'il existe une application de l'ensemble $\mathscr{F}$ pour laquelle l'image de C_{a_1} est C_{a_2}.
5. Montrer que si a_1 et a_2 sont distincts, C_{a_1} et C_{a_2} n'ont pas de point commun.

   Déterminer l'ensemble des points de P par lequel passe une courbe C_a.