Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1982 Caen ∽

EXERCICE 1

Déterminer l'ensemble des couples $(a,\ b)$ d'entiers naturels non nuls tels que
P.G.C.D. $(a,\ b)$ + P.P.C.M. $(a,\ b) = b+9$.

EXERCICE 2

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère l'application v de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, qui, à tout point M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x',\ y',\ z'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& -x+2\\ y' &=& z+1\\ z' &=& y+1\end{array}\right.$$

1. Soit $f = h_1 \circ v$, application composée de v par h_1, où h_1 est l'homothétie de centre A$(1~;~0~;~0)$ et de rapport 2.
   Démontrer que f admet un unique point invariant B.
2. Soit $r = h_2 \circ v$, application composée de v par h_2, où h_2 est l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
   Démontrer que r est un demi-tour d'axe une droite D, que l'on précisera.
3. En déduire que v est un vissage.
   Préciser les éléments caractéristiques de ce vissage.

PROBLÈME

N.B. - Les parties B et C de ce problème sont indépendantes.

Soit λ un réel non nul, on considère la fonction f_λ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_\lambda(x) = x+\lambda(x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

On désigne par C_λ la courbe représentative de la fonction f_λ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Déterminer f_λ' et f_λ'' les fonctions dérivées première et seconde de f.
   Étudier les variations de f_λ'.
2. Discuter, selon le réel λ, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x,

   $$f_\lambda' = 0.$$

   Préciser la position de ces solutions par rapport à 0 et à 1. (On distinguera les quatre cas $\lambda < 0$; $0 < \lambda < \mathrm{e}$; $\lambda = \mathrm{e}$; $\lambda > \mathrm{e}$).
3. Déduire de ce qui précède, le sens de variation de f_λ suivant les valeurs du réel λ.
4. Étudier les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser les branches infinies de la courbe C_λ.

5. Montrer qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes C_λ.
6. Soit I_λ le point de C_λ dont l'abscisse est 1. Écrire une équation de la tangente D_λ en I_λ à la courbe C_λ.
   Montrer que les droites D_λ ont un point commun B.
7. On se propose de tracer avec précision les courbes C_{-1}, C_{e}, C_4. Les courbes seront tracées sur une même figure sur papier millimétrique en prenant 2 cm comme unité.
   a. On prend $\lambda = -1$. Montrer que l'équation d'inconnue $x, f'_{-1}(x) = 0$, n'a qu'une solution notée x_1 comprise entre $-0,57$ et $-0,56$.
   Construire la courbe C_{-1}
   b. Tracer C_{e}.
   c. Montrer que l'équation d'inconnue x, $f'_4(x) = 0$, a deux solutions : x_1 comprise entre 0,35 et 0,36 et x_2 comprise entre 2,15 et 2,16.
   Tracer C_4.

Partie B

1. Montrer que la fonction f_λ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'ensemble de ces primitives.
2. Montrer que, pour chaque réel non nul λ, on peut définir une suite de fonctions continues $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$\left\{\begin{array}{llcl} \forall x \in \mathbb{R}, & \varphi_1(x) & = & \displaystyle\int_0^x f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in \mathbb{R} & \varphi_{n+1}(x) & = & \displaystyle\int_0^x \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda. \end{array}\right.$$

   Calculer $\varphi_1(x)$. Montrer, par récurrence, pour tout naturel n non nul et tout réel x

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n + 1}{(n+1)!} + (-1)^n \lambda(x+n+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

C

On suppose dans cette partie $-\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \lambda < 0$.

1. Montrer que le réel x_1 tel que $f'_\lambda(x_1) = 0$ est strictement inférieur à -1.
   En déduire que, si $-1 < x < 0$, alors, $-1 < \lambda < 0$.
2. On considère la suite u définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) = u_n + \lambda(u_n+1)\,\mathrm{e}^{-u_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

   Montrer que :
   a. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad -1 < u_n < 0$,
   b. la suite u est décroissante,
   c. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} < (1+\lambda)(u_n+1)$.
   En déduire que la suite u est convergente et trouver sa limite.