Durée : 4 heures

Baccalauréat C Caen septembre 1969

EXERCICE 1

Déterminer les entiers naturels n tels que le nombre N défini par

$$N = n^3 + n - 2$$

soit divisible par 7.

EXERCICE 2

On donne le nombre complexe $z = 3 + 4\text{i}$.
Soient z_1 et z_2 ses racines carrées. Placer, dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), les images, M, M_1 et M_2, des trois nombres z, z_1 et z_2.
Déterminer z_1 et z_2 par leurs parties réelles et leurs parties imaginaires.

PROBLÈME

Dans un plan, on considère deux axes orthonormés $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$ ayant la même origine O. On désigne par A le point de coordonnées $(0\ ;\ -4)$ et par B le point de coordonnées $(0\ ;\ +4)$. Soit $u'\text{A}u$ et $v'\text{B}v$ deux axes ayant respectivement pour origine les points A et B, tous deux parallèles à $x'\text{O}x$ et orientés dans le même sens que lui.
Soit k un nombre réel donné.
On considère l'application f qui, au point M de $u'\text{A}u$ d'abscisse $\overline{\text{A}M} = m$, associe, s'il existe, le point P de $v'\text{B}v$ d'abscisse $\overline{\text{B}P} = p$ telle que

$$pm - p - m - k = 0.$$

(Les unités de longueur sur $u'\text{A}u$ et sur $v'\text{B}v$, sont les mêmes que sur $x'\text{O}x$.)

1. Quel est le point I de $u'\text{A}u$ où l'application n'est pas définie ?
   Montrer que, si $k \neq -1$, f est une application bijective de la droite $u'\text{A}u$ privée du point I sur la droite $v'\text{B}v$ privée d'un point J que l'on déterminera.
   Que se passe-t-il si $k = -1$?
2. M et N désignant deux points de l'axe $u'\text{A}u$, on désigne par $\overline{MN}$ la mesure algébrique, sur l'axe $u'\text{A}u$, du vecteur $\overrightarrow{MN}$. De la même façon, P et Q désignant deux points de l'axe $v'\text{B}v$, on désignera par $\overline{PQ}$ la mesure algébrique, sur l'axe $v'\text{B}v$, du vecteur $\overrightarrow{PQ}$.
   a. Montrer que $\overline{\text{I}M} \cdot \overline{\text{J}P} = k + 1$.
   b. Soit quatre points, M_1, M_2, M_3 et M_4 de l'axe $u'\text{A}u$, distincts deux à deux et distincts de I. On appelle P_1, P_2, P_3 et P_4 leurs images par f.
   Montrer que, si $k \neq -1$, le birapport de l'ensemble ordonné des quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 est égal au birapport de l'ensemble ordonné des quatre points P_1, P_2, P_3 et P_4.
   Que peut-on dire des points P_1, P_2, P_3 et P_4 si l'ensemble ordonné des quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 forme une division harmonique ?
3. **a.** Soit M_0 et M deux points de l'axe $u'\text{A}u$, différents de I, et soit P_0 et P leurs images respectives par f. Démontrer analytiquement que, si
   $k \neq -1$, l'ensemble des points d'intersection des droites M_0P et $M\text{P}_0$, lorsque M_0 reste fixe et M parcourt l'axe $u'\text{A}u$ privé du point I, est une droite privée de deux points.
   En déduire une construction de P, connaissant M, M_0 et P.

b. k étant toujours supposé différent de -1, donner l'équation représentant la droite MP dans le système d'axes $(x'\text{O}x, y'\text{O}y)$. Soit X et Y les coordonnées d'un point C quelconque du plan.

Comment choisir X et Y pour qu'il existe une droite PM et une seule passant par C ?

Montrer que l'ensemble des points C possédant la propriété précédente se compose de deux droites privées chacune d'un point et d'un ensemble (C_k) dépendant de k.

Reconnaitre la nature de l'ensemble (C_k) suivant les valeurs de k et tracer sur une même figure (C_0) et (C_{-1}).