∽ Baccalauréat C Caen septembre 1976 ∾

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(x) & = & -x^2 + x^2 \text{Log}\, x \quad \text{si } x \in \mathbb{R}_+^\star \end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité de f.
2. Étudier la fonction et construire le graphe C dans un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.
3. Trouver l'aire de la partie du plan, comprise entre l'axe $x'x$, le graphe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \text{e}$.

EXERCICE 2

1. Trouver les diviseurs de 3108 (ce nombre étant écrit en base dix).
2. On considère le nombre qui s'écrit 3114 en base dix. Existe-t-il une base dans laquelle il s'écrit $\overline{1976}$? Déterminer cette base.

PROBLÈME

Partie A

Soit A l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à termes réels de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

1. Comment doit-on choisir les réels a et b pour que M soit inversible ?
2. On appelle $\mathscr{B}$ le sous-ensemble des matrices inversibles de A. Montrer que $\mathscr{B}$ est un sous-groupe commutatif du groupe multiplicatif des matrices inversibles.

Partie B

On pose dans la suite du problème $a = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$, $\quad b = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ avec $\alpha \in [0\ ,\ \pi]$.
Soit $\mathscr{E}$ un plan vectoriel euclidien de base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\imath}\right)$.
On désigne par φ_α l'application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ de matrice

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\alpha & 1-\cos\alpha \\ 1-\cos\alpha & 1+\cos\alpha \end{pmatrix}$$

1. Quelle valeur faut-il donner à α pour que φ_α ne soit pas bijective ? Déterminer, dans ce cas, le noyau N et l'image I de cet endomorphisme.
2. Quelles valeurs faut-il donner à α pour que φ_α soit involutive ? Identifier φ_α pour chaque valeur trouvée.

Partie C

Soit un plan affine euclidien E associé à $\mathscr{E}$ et muni du repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On appelle f_π l'application affine de E associée à φ_π telle que $f_\pi(\text{O}) = \text{O}'$ avec O$'$ de coordonnées $(-1~;~1)$.

1. Tout point m de E de coordonnées $(x~;~y)$ a pour image par f_π le point m' de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

   Déterminer l'ensemble des points de E invariants par f_π. En déduire la nature géométrique de f_π.
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$g(x) = x - 2 + \frac{9}{x-3}.$$

   Étudier les variations de g. On appelle (C) sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
3. Trouver l'équation de la transformée (C') de (C) par f_π. Construire (C) et (C') dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
4. Déterminer l'aire du domaine plan fermé limité par les deux courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 4$ et $y = 5$.

Partie D

Dans le plan affine euclidien E associé à $\mathscr{E}$ et de repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ on donne les points A$(1~;0)$, B$(0~;1)$, $0'(-1~;~1)$, A$'\left(-\frac{1}{4}~;~\frac{5}{4}\right)$, B$'\left(-\frac{3}{4}~;~\frac{7}{4}\right)$.

1. Soit m un point de E de coordonnées $(x~;~y)$.

   Déterminer, en fonction de x et y, les trois réels α, β, γ vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et tels que m soit le barycentre des trois points O, A et B affectés respectivement des coefficients α, β, γ.

   Soit f' l'application qui, à tout point $m(x~;~y)$, associe le point $m'\left(x'~;~y'\right)$ barycentre des points O$'$, A$'$, B$'$ affectés respectivement des coefficients α, β, $\gamma\cdot$

   Montrer que f' est une application affine dont l'endomorphisme associé est de la forme φ_α. On notera α_0 la valeur de α ainsi obtenue.
2. Démontrer que, pour deux valeurs de nombre réel λ, il existe des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathscr{E}$, distincts du vecteur nul vérifiant $\varphi_{\alpha_0}\left(\vec{u}\right) = \vec{u}$.

   Montrer que l'ensemble de ces vecteurs est la réunion de deux droites vectorielles.

   Montrer que le vecteur $\overrightarrow{mm'}$ est élément de l'une de ces droites vectorielles pour tout $m \in$ E.

   Déterminer l'ensemble des points invariants par f'. En déduire la construction de l'image par f' de la droite d'équation $x = 2$.