

## ∞ Baccalauréat C Caen septembre 1980 ∞

### EXERCICE 1

Calculer l'intégrale définie  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin^5 x \, dx$ .

### EXERCICE 1

1. Dans le corps des complexes calculer

$$(2+i)^3 \quad \text{et} \quad (1-i)^3.$$

2. Résoudre l'équation

$$z \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z^6 - 9iz^3 + 18 - 26i = 0.$$

On en exprimera les racines sous forme algébrique.

### PROBLÈME

#### Partie A

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ;

$$x \mapsto \frac{x + \sqrt{5x^2 - 4}}{2}$$

et soit un plan affine euclidien  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Faire une étude précise de  $f$  et tracer sa courbe représentative  $C$  dans le plan  $\mathcal{P}$ .
2.  $D$  étant la droite d'équation  $y = -x$ , déterminer l'expression analytique de la symétrie affine  $s$  par rapport à la droite  $D$  selon la direction du vecteur  $\vec{j}$ .
3. Déterminer une équation de la courbe  $C'$  image de  $C$  par  $s$ . En déduire que  $C \cup C'$  est la courbe d'équation

$$x^2 + xy - y^2 = 1,$$

dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On l'appellera  $H$  et on la tracera dans le plan  $\mathcal{P}$ .

4. Écrire une équation de  $H$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  où  $\vec{l}$  désigne le vecteur  $\vec{i} + 2\vec{j}$ . En déduire que  $H$  est invariante dans deux symétries (en plus de  $s$ ) dont on précisera les éléments.

#### Partie B

On désigne par  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et on considère la suite réelle  $(u_p)$  définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{p+2} = u_{p+1} + u_p \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ . Démontrer par récurrence sur  $p$  que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  on a

$$A^p = \begin{pmatrix} u_{2p-2} & u_{2p-1} \\ u_{2p-1} & u_{2p} \end{pmatrix}$$

2. Démontrer qu'il existe un réel  $a > 0$ , et un seul, tel que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on ait

$$2au_p = \left(\frac{1}{2} + a\right)^{p+1} - \left(\frac{1}{2} - a\right)^{p+1}.$$

En déduire une expression de  $u_p$  en fonction de  $p$ .

### Partie C

On considère l'application affine  $T$  de  $\mathcal{P}$  dont l'endomorphisme associé a pour matrice  $A$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  et qui est telle que  $T(O) = O$ .

1. Montrer que  $T(H) = H$ .
2. On désigne par  $E$  le sous-ensemble de  $H$  constitué des points à coordonnées entières  $[(x, y) \in \mathbb{Z}^2]$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Montrer que  $T(E) \subset E$  et  $s(E) \subset E$ .
3. Soit la suite de points  $(M_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = T(M_n)$ ,  $M_0$  étant le point de coordonnées  $(1; 0)$ .  
On désigne par  $x_n$  et  $y_n$  l'abscisse et l'ordonnée de  $M_n$ . En utilisant la partie B exprimer  $x_n$  et  $y_n$  en fonction des termes de la suite  $(u_n)$ , puis en fonction de  $n$ .
4. Étudier le comportement de la suite  $(x_n)$  lorsque  $n$  tend vers plus l'infini. En déduire que  $E$  est infini.