Baccalauréat C Caen septembre 1973

EXERCICE 1

1. On considère dans $\mathbb{N}$ les entiers $\overline{20}$, $\overline{33}$, $\overline{1100}$ écrits en base a.
   Quelle est cette base sachant que $\overline{20} \times \overline{33} = \overline{1100}$?
2. On considère l'entier naturel $A = \overline{5x23}$ écrit dans la base 6.
   a. Déterminer x pour que A soit divisible par 7.
   b. Déterminer x pour qu'il soit divisible par 5.
   c. Peut-il être divisible par 35 ?
   (7, 5 et 35 sont écrits en base 10.)

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique définie par

$$x \longmapsto f(x) = \left|\frac{\operatorname{Log} x}{x^2}\right|.$$

1. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   (Valeurs numériques approchées $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,65$, $e^{-1} \approx 0,36$.)
2. Soit $\alpha \in [1~;~+\infty[$. Calculer $\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Quelle est la signification géométrique de $\mathscr{A}(\alpha)$?
   Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}(\alpha)$.

EXERCICE 3

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$, $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel associé.
On considère une famille Φ d'applications affines $f_{k,\,a}$, de P, où $(k,~a)$ est un couple de nombres réels tel que a soit différent de zéro.
On désigne par $\text{F}_{k,\,a}$ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ associé à $f_{k,\,a}$. On suppose que le point O est invariant par $f_{k,\,a}$ et que

$$\left\{\begin{array}{l c l}
\text{F}_{k,\,a}\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \dfrac{k+1}{a}\overrightarrow{\imath} + \dfrac{k-1}{a}\overrightarrow{\jmath}\\
\text{F}_{k,\,a}\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \dfrac{k-1}{a}\overrightarrow{\imath} + \dfrac{k+1}{a}\overrightarrow{\jmath}
\end{array}\right.$$

1. M étant un point de P de coordonnées $(x~;~y)$, déterminer les coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ de M′ image de M par l'application $f_{k,\,a}$.
2. **a.** Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{k,\,a}$ soit bijective.
   Quelle est la nature de l'application $f_{0,\,a}$?
   b. Soit (D) la droite passant par le point A de coordonnées (1 ; 0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées (1 ; 1).
   Déterminer l'image (D′) de (D) par $f_{k,\,a}$. Que remarque-t-on ?

c. Démontrer que $f_{k,\,a}$ est une isométrie de P si, et seulement si, $(k,\ a)$ est élément d'un ensemble E formé de quatre couples que l'on déterminera.

On précisera ensuite la nature des quatre isométries obtenues.

3. On se propose dans cette question d'étudier les applications $f_{k,\,2}$.

On désigne par $\mathscr{A}$ le sous-ensemble de Φ ayant pour éléments les applications $f_{k,\,a}$ telles que $k \neq 0$ et $a = 2$.

a. Démontrer que la composition des applications, notée $\circ$, est une loi de composition interne dans $\mathscr{A}$.

Démontrer que $\mathscr{A}$ muni de la loi $\circ$ est un groupe commutatif.

b. Déterminer l'ensemble (Δ) des points invariants par l'application $f_{k,\,2}$ pour $k \neq 0$ et $k \neq 1$.

c. Démontrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul tel que pour <u>tout</u> point M de P et toute application $f_{k,\,2}$ de $\mathscr{A}$, M$'$ désignant l'image de M par $f_{k,\,2}$, $\overrightarrow{\text{MM}'}$ et $\overrightarrow{v}$ soient linéairement dépendants.

d. Soit $\mathscr{D}$ la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{v}$, m la projection de M sur (Δ) selon la direction $\mathscr{D}$, $(\alpha\ ;\ \beta)$ les coordonnées de m.

Calculer α et β en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point M.

Démontrer que pour tout point M, on a

$$\overrightarrow{m\text{M}'} = k\,\overrightarrow{m\text{M}}.$$

4. Soit F un endomorphisme quelconque de l'espace vectoriel $\mathscr{V}$. On note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$.

Soit φ l'application de $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \longmapsto \varphi\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{u}.\text{F}\left(\overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{v}.F\left(\overrightarrow{u}\right).$$

a. Démontrer que φ est une forme symétrique et bilinéaire.

b. On suppose que $\text{F} = \text{F}_{1,\,a}$.

Pour quelles valeurs de a, φ est-il un produit scalaire ?

c. On suppose que $\text{F} = \text{F}_{-1,\,a}$.

Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles φ soit un produit scalaire ?