

## ∞ Baccalauréat C Caen<sup>1</sup> septembre 1978 ∞

### EXERCICE 1

3 POINTS

On considère, dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation (E) à l'inconnue  $(x; y)$  :

$$(E) \quad 6x - 10y = a.$$

où  $a$  désigne un entier relatif.

1. À quelle condition, portant sur  $a$ , l'équation (E) admet-elle des solutions?
2. Résoudre l'équation dans la cas :  $a = 22$ .

### EXERCICE 2

5 POINTS

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \forall n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f : x \longmapsto \text{Log} \left( x + \sqrt{1+x^2} \right)$$

Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .

Calculer  $u_0$ .

2. Calculer  $u_1$ .

Calculer  $u_3$  à l'aide d'une intégration par parties.

3. Démontrer que :

$$\forall x, x \in [0; 1], \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n.$$

En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente de limite 0.

### PROBLÈME

12 POINTS

**Les trois parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres**

Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine rapporté au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On notera  $P$  le plan vectoriel associé dont une base est  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

#### Partie A

Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  qui, au point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$ , fait correspondre le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$  définies par :

$$\begin{cases} x' &= 3x + 5y \\ y' &= -2x - 3y - 2. \end{cases}$$

1. Nantes Rennes

1. **a.** Démontrer que  $f$  est une application affine et qu'elle admet un seul point invariant.
- b.** Déterminer la matrice, dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $P$  (application linéaire de  $P$  dans  $P$ ) associé à  $f$ .
2. Quelle est la nature géométrique de l'application  $f = f \circ f$ ? Caractériser  $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$ .
3. Soit  $M$  un point quelconque de  $\mathcal{P}$ ; on note :

$$M_1 = f(M) \quad ; \quad M_2 = f(M_1) \quad ; \quad M_3 = f(M_2).$$

Démontrer que l'isobarycentre (ou équilibarycentre) du système des points  $(M, M_1, M_2, M_3)$  est un point invariant par  $f$ .

Préciser ce point.

4.  $M$  étant toujours un point quelconque de  $\mathcal{P}$ , on considère la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $\mathcal{P}$  définie par :

$$\begin{cases} M_0 & = & M \\ M_{n+1} & = & f(M_n) \quad \forall n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On notera  $(x_n; y_n)$  les coordonnées de  $M_n$ .

Démontrer qu'il existe un couple  $(p; q)$ , élément de  $\mathbb{R}^2$ , tel que

$$\forall n, n \in \mathbb{N}, x_{n+2} + x_n = 2p \quad \text{et} \quad y_{n+2} + y_n = 2q.$$

### Partie B

Soit  $\mathcal{U}$ , l'ensemble des suites réelles définies sur  $\mathbb{N}$ .  $\mathcal{U}$  est muni de sa structure habituelle d'espace vectoriel réel.

On désigne par  $S$  le sous-ensemble de  $\mathcal{U}$ , dont les éléments sont les suites  $s$  qui possèdent la propriété suivante :

pour toute suite  $s$ , de terme général  $s_n$  il existe un réel  $a$  tel que, pour tout entier naturel  $n$ , on ait :

$$s_{n+2} + s_n = 2a.$$

1. **a.** Démontrer que  $S$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{U}$ .
- b.** Soit  $s$  un élément de  $S$ . Démontrer que :

$$\forall n, n \in \mathbb{N}, \quad s_{n+4} = s_n.$$

En déduire  $s_n$  en fonction de  $a, s_0, s_1$ .

2. **a.** Démontrer que, étant donné un élément  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$ , il existe une suite  $s$ , et une seule, de  $S$  telle que :

$$\begin{cases} s_0 & = & b \\ s_1 & = & c \\ s_{n+2} + s_n & = & 2a \quad \forall n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On notera  $s_{a,b,c}$  la suite ainsi obtenue.

- b.** Démontrer que l'application de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  dans  $S$  qui, au triplet  $(a, b, c)$ , associe  $s_{a,b,c}$  est un isomorphisme d'espace vectoriel.
- c.** Quelle est la dimension de l'espace vectoriel  $S$ ?

3. Soit  $u, v, w$  les suites de terme général respectif :

$$u_n = \cos n \frac{\pi}{2} ; \quad v_n = \sin n \frac{\pi}{2} ; \quad w_n = 1.$$

- a. Démontrer que  $u, v, w$  appartiennent à  $S$  et forment une base de  $S$ .
- b. Déterminer, dans la base  $(u, v, w)$ , les coordonnées d'un élément  $s$  de  $S$  en fonction de  $s_0, s_1, a$ .

### Partie C

Soit  $G$  l'ensemble des applications affines  $g$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  telles que  $g^4 = g \circ g \circ g \circ g$  soit l'application identique de  $\mathcal{P}$ .

On note  $\psi$  l'endomorphisme de  $P$  associé à  $g$ .

1. Soit  $M$  un point quelconque de  $P$ . On note :

$$M_1 = g(M) ; \quad M_2 = g(M_1) ; \quad M_3 = g(M_2).$$

Démontrer que le point  $\Omega$ , isobarycentre du système  $(M, M_1, M_2, M_3)$  est invariant par  $g$ .

2. Quelle propriété remarquable possède l'endomorphisme  $\psi^2$ ? Quelle peut être la nature géométrique de  $\psi^2$ ?
3. On suppose que  $\psi^2$  est la symétrie vectorielle par rapport à la droite vectorielle  $D_1$  de base  $(\vec{e}_1)$ , de direction la droite vectorielle  $D_2$  de base  $(\vec{e}_2)$ .
  - a. Écrire la matrice de  $\psi^2$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .
  - b. Calculer le déterminant de cette matrice.
  - c. En déduire que  $\psi^2$  ne peut être une telle symétrie vectorielle.
4. Démontrer que  $G$  est la réunion de deux ensembles disjoints  $G_1$  et  $G_2$  correspondant aux deux valeurs possibles de  $\psi^2$  dont on déterminera parfaitement l'un et dont on montrera que l'autre est non vide et constitué d'éléments admettant un seul point invariant.