

Baccalauréat C Caen¹ septembre 1979

EXERCICE 1

3 POINTS

On se propose de résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E) \quad z^6 - 2(1 - 5i)z^3 + 11 + 2i = 0.$$

1. Résoudre l'équation obtenue en substituant t à z^3 dans (E).
2. Calculer $(2 - i)^3$.
3. Résoudre l'équation (E).

EXERCICE 2

4 POINTS

1. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$f(x) = x \operatorname{Log} x + \frac{1}{x}.$$

- Démontrer que f possède des primitives sur \mathbb{R}_+^* , et déterminer celle qui s'annule pour $x = 1$.
2. Étudier (sans tracer la courbe correspondante) la variation de $xf(x)$ sur \mathbb{R}_+^* et en déduire le signe de $f(x)$.
 3. Étudier les variations de la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \left(\operatorname{Log} x - \frac{1}{2} \right) + \operatorname{Log} x + \frac{1}{4}$$

et en tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.

PROBLÈME

13 POINTS

On désigne par \mathcal{F} l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , par \mathcal{P} l'ensemble des fonctions polynômes définies sur \mathbb{R} , de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que : \mathcal{F} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} pour les lois usuelles et que \mathcal{T} est le sous-espace vectoriel de \mathcal{P} , dont une base est (P_0, P_1, P_2) avec

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

Soit Φ l'application de \mathcal{F} dans \mathcal{F} telle que $\Phi(F) = f$ où f est définie par

$$f(x) = F(x+1) - F(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

Partie A

1.
 - a. Montrer que Φ est un endomorphisme de \mathcal{F} .
 - b. Quelle est l'image par Φ d'un polynôme de degré n ? En déduire que $\Phi(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$.
2. Soit φ la restriction de Φ à \mathcal{P} .
 - a. Montrer que φ est un endomorphisme de \mathcal{P} et déterminer $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ en fonction de P_0, P_1, P_2 .
En déduire le noyau et l'image de φ .
 - b. Existe-t-il des droites \mathcal{D} de \mathcal{P} telles que $\varphi(\mathcal{D}) = (\mathcal{D})$?

1. Nantes-Poitiers-Rennes

3. Soit F_0 l'élément de \mathcal{F} défini par $F_0(x) = e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 Déterminer $f_0 = \Phi(F_0)$. En déduire que la droite vectorielle engendrée par F_0 est globalement invariante par Φ .
 Quelle est la restriction de Φ à cette droite?

Partie B

Dans cette partie, on se propose, pour tout nombre réel λ , de déterminer l'ensemble S_λ :

$$S_\lambda = \{F \in \mathcal{F}, \quad \Phi(F) = \lambda F\}$$

1. a. Trouver un nombre réel λ_0 tel que le noyau de Φ soit égal à S_{λ_0} .
 b. Vérifier que

$$(F \in S_\lambda) \iff [\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x+1) = (\lambda+1)F(x).]$$

Quel est l'ensemble S_{-1} ?

- c. Soit J la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = e^x \sin \pi x.$$

Démontrer qu'il existe une valeur λ , unique telle que J appartienne à S_λ .

2. Pour λ différent de -1 , on notera u_λ , la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par
 $u_\lambda(x) = |1 + \lambda|x$.

Démontrer que si $F \in \mathcal{F}$, la fonction $G = \frac{F}{u_\lambda}$ appartient à \mathcal{F} .

3. On suppose $\lambda > -1$.

Démontrer que F appartient à S_λ si et seulement si G appartient au noyau de Φ . En déduire qu'il existe un réel a , indépendant de λ , tel que

$$S_\lambda = \{u_\lambda \times H, \quad H \in S_a\}$$

4. On suppose maintenant $\lambda < -1$.

Démontrer qu'il existe un réel b , indépendant de λ , tel que

$$S_\lambda = \{u_\lambda \times H, \quad H \in S_b\}$$