

∞ Baccalauréat C Caen septembre 1983 ∞

EXERCICE 1

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^3 - (3 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z = 0.$$

2. \mathcal{P} étant un plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on appelle A, B, C les points de \mathcal{P} dont les affixes sont les racines de l'équation.

Montrer qu'il existe un point D, d'abscisse nulle, distinct des points A, B, C, tel que D appartienne au cercle passant par A, B, C. Déterminer l'ordonnée de D.

EXERCICE 2

Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx.$$

PROBLÈME

Soit \mathcal{P} le plan rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit \mathcal{V} le plan vectoriel associé.

Partie A

Soit φ l'endomorphisme de \mathcal{V} de matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j})

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que φ est une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments.

Partie B

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|4x^2 - 16x + 7|}.$$

Soit \mathcal{C} la représentation graphique de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a. Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de C. Étudier les variations de f . Déterminer les asymptotes de C. Tracer la courbe \mathcal{C} .
b. Soit \mathcal{C}' l'image de \mathcal{C} dans la symétrie orthogonale d'axe $(O; \vec{i})$. Tracer \mathcal{C}' . Montrer que $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ est la réunion d'une ellipse E et d'une hyperbole H; on donnera les coordonnées du centre et des sommets de chacune des deux coniques ainsi que celles de leurs foyers et les équations des directrices associées.
2. Soit s l'application affine de \mathcal{P} laissant invariant le point Ω de coordonnées $(2; 0)$ et dont l'endomorphisme associé est φ (étudié dans la partie A). Étudier $s(E)$ et $s(H)$. Tracer $s(H)$.

Partie C

Sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$ de \mathbb{R} , on définit la fonction u de la variable t par

$$\forall t \in I, \quad u(t) = e^{t-1} + \ln(t-1) \quad (\ln \text{ désigne le logarithme népérien}).$$

1. **a.** Étudier la variation de u . Montrer que u est une bijection de I sur \mathbb{R} .
- b.** Pour tout t de I , calculer $u''(t)$, où u'' est la dérivée seconde de u .
Montrer que u'' est une bijection de I sur \mathbb{R} et qu'elle s'annule pour $t_0 \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$.
2. Dans le plan \mathcal{P} rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère le mouvement d'un point M dont les coordonnées sont définies par

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} 3x &= 2 + \frac{3}{2} \cos[u(t)] \\ y &= \frac{3}{2} \sin[u(t)] \end{cases} \quad (t \text{ désigne le temps}).$$

- a.** Déterminer la trajectoire de M et la tracer.
- b.** Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ de M à l'instant t .
Étudier la nature du mouvement de M sur sa trajectoire.