∽ Baccalauréat C Caen juin 1966 ∾
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Soit la fonction

$$y = 5\cos x - 10\cos^3 x + 8\cos^5 x.$$

1. Montrer que l'on peut écrire

$$y = \frac{5}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 5x.$$

2. Étudier les variations et tracer la courbe représentative de la fonction y dans l'intervalle $\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

EXERCICE 2

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy, on considère la transformation ponctuelle $\mathcal{T}$ qui fait correspondre au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ le point M$'$ de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & ax+by,\\ y' & = & cx+dy,\end{array}\right.$$

où a, b, c et d désignent des constantes réelles données vérifiant la condition

$$ad - bc \neq 0.$$

On notera M$' = \mathcal{T}$(M) et l'on associera à $\mathcal{T}$ le tableau

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

Les constantes a, b, c et d seront appelées les éléments du tableau T. On dira que deux transformations $\mathcal{T}$ sont égales (ou identiques) si, et seulement si, elles ont même tableau.

Partie A

On effectue successivement deux transformations $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ de tableaux respectifs

$$\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}.$$

On obtient donc, à partir d'un point M, successivement

$$\mathrm{M}_1 = \mathcal{T}_1\mathrm{M}), \quad \mathrm{M}_2 = \mathcal{T}_{25}\left(\mathrm{M}_1\right).$$

1. Montrer que la transformation $\mathcal{T}$ qui fait correspondre à M le point M $_2$ est de même nature que les transformations $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, en d'autres termes que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_2 & = & ax+by,\\ y_2 & = & cx+dy,\end{array}\right.$$

avec $ad - bc \neq 0$ (x_2, y_2 désignent les coordonnées de M$_2$).

(On explicitera au préalable a, b, c et d en fonction de a_1, b_1, c_1, d_1 et a_2, b_2, c_2, d_2.)
On notera

$$\begin{array}{lcl}\mathcal{T} & = & \mathcal{T}20\mathcal{T}1\\ \mathrm{T} & = & \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1\end{array}$$

(T désignant le tableau associé à $\mathcal{T}$ et l'on dira que T est le produit de T_1 par T_2.

2. Montrer qu'il existe une transformation $\mathcal{T}_0$, dont on déterminera le tableau associé T_0, telle que

$$\mathcal{T}_0 \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \mathcal{T}_0 = \mathcal{T},$$

quelle que soit la transformation $\mathcal{T}$.

3. Montrer qu'en général

$$\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1 \neq \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2$$

et illustrer cette propriété par un exemple numérique.

4. Montrer qu'à toute transformation $\mathcal{T}$ on peut faire correspondre une transformation, dite réciproque ou inverse de $\mathcal{T}$ et notée $\mathcal{T}^{-1}$ (dont le tableau sera noté T^{-1}) telle que

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}_0.$$

$\mathcal{T}_0$ désigne la transformation définie au 2.)

Partie B

On particularise la transformation $\mathcal{T}$ en posant

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

où θ désigne un angle donné.
On notera $\mathcal{T}_\theta, \mathrm{T}_\theta$ pour marquer la dépendance de $\mathcal{T}$, T et θ.

1. Expliciter le tableau T_θ^{-1} associé à la transformation $\mathcal{T}_\theta^{-1}$ inverse de $\mathcal{T}_\theta$ et vérifier la rela ion $\mathcal{T}_\theta^{-1} = \mathcal{T}_\theta$.

2. À chaque point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, qu'on appelle affixe de M.

Montrer que l'affixe du point $\mathcal{T}_\theta(\mathrm{M})$ est de la forme $k\overline{z}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z et k un nombre complexe indépendant de z. Expliciter k.

3. Donner une construction géométrique élémentaire permettant de passer du point M au point $\mathcal{T}_\theta(\mathrm{M})$.