Durée : 4 heures

Baccalauréat Caen juin 1965

Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

On donne deux points, A et A$'$, et une droite (D).
Quel est l'ensemble des axes orientés parallèles à (D) des déplacements hélicoïdaux dans lesquels A$'$ est le transformé de A ?
Construire l'axe d'un tel déplacement hélicoïdal, connaissant l'angle orienté α de ce déplacement.

EXERCICE 2

1. Calculer la dérivée de la fonction

$$y = (n - x)\text{e}^{x},$$

   où n est une constante.
2. Étudier, quand $x \geqslant 0$, les variations de la fonction

$$y = (2 - x)\text{e}^{x}$$

   et en construire la courbe représentative pour $x \geqslant 0$ dans un repère orthonormé.
   Calculer l'aire du domaine compris entre cette courbe et les demi-axes Ox et Oy.

EXERCICE 3

On considère, sur un axe orienté $x'\text{O}x$, les points A et B d'abscisses respectives $(+a)$ et $(-a)$.
On supposera que a est positif. On se propose d'étudier la transformation ponctuelle plane T_θ, où θ est un angle donné défini à $k\pi$ près, qui, à un point m du plan, fait correspondre le point M de ce plan, intersection des droites Au et Bv qui font respectivement avec les droites Am et Bm les angles orientés

$$(\text{A}m,\ \text{A}u) = \theta \quad \text{et} \quad (\text{B}m,\ \text{B}v) = \theta.$$

1. **a.** Quel est l'ensemble des points m du plan qui n'ont pas de transformé M à distance finie par T_θ ?
   Quelle est la transformation réciproque de la transformation T_θ ?
   Pour quelles valeurs de θ cette transformation est-elle involutive ?
   Montrer que l'ensemble de ces transformations forme un groupe.
   b. Quelle est la figure transformée par T_θ d'un cercle passant par A et B, d'une droite passant par A, d'une droite passant par B ?
   c. Dans le cas où $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, quelle est la figure transformée par $T_{\frac{\pi}{2}}$ d'une droite perpendiculaire à $x'\text{O}x$?
2. On supposera, dans toute la suite du problème, que $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. On désignera par x et y les coordonnées de m et par X et Y celles de M dans le repère orthonormé $\left(x'\text{O}x,\ y'\text{O}y\right)$.

a. Calculer X et Y en fonction de x et y. Discuter.

b. On suppose que m décrit un cercle (Γ) passant par A et B. Écrire l'équation d'un tel cercle et montrer que, si λ est l'ordonnée de son centre, on a les relations

$$y - x = X + y = \lambda.$$

En déduire la relation liant X et Y lorsque m décrit (Γ). Conséquence.

c. On suppose que m décrit une droite perpendiculaire à $x'\text{O}x$, d'abscisse ℓ.

Trouver l'équation de la courbe décrite par M. Nature de cette courbe. Discuter suivant les valeurs de ℓ.

N. B. - Les deux parties du problème sont entièrement indépendantes.