Durée : 4 heures

Baccalauréat Caen septembre 1966
série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

On considère la fonction y définie par l'égalité

$$y = x\sqrt{\frac{x}{x-2}}.$$

1. Calculer sa dérivée, y', et étudier le sens de variation de y.
2. Montrer que le rapport $\dfrac{y}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers l'infini.

   Chercher la limite de $y - x$ quand x tend vers l'infini : on pourra, dans ce but, utiliser l'égalité suivante, que l'on établira :

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 = \frac{2}{(x-2)}\left[\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1\right].$$

3. Construire la courbe représentative de la fonction y.

II.

1. On donne un angle réel θ. Montrer que l' équation

$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$$

   admet en général deux racines complexes conjuguées, que l'on notera z_1 et $\overline{z_1}$.

   Donner leurs expressions en fonction de θ.

   Quel est le module de z_1 ? Examiner le cas où θ est un multiple entier de π.

2. On appellera, de même, z_2 et $\overline{z_2}$ les racines de équation

$$z_2 - 2z\cos\theta' + 1 = 0,$$

   où θ' désigne également un angle réel donné.

   Calculer en fonction de $\cos\theta$ et $\cos\theta'$, les coefficients a, b, c et d pour que le polynôme

$$P(z) \equiv z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$$

   soit identique au polynôme

$$Q(z) \equiv (z - z_1)\left(z - \overline{z_1}\right)(z - z_2)\left(z - \overline{z_2}\right).$$

   Montrer que l'on a, dans ces conditions, les relations

$$(C) \qquad \left\{\begin{array}{lcl} a & = & c, \\ d & = & 1. \end{array}\right.$$

3. Inversement, on se donne *a priori* les coefficients a, b, c et d, satisfaisant aux conditions (C) et l'on cherche à déterminer des angles θ et θ' tel que $Q(z)$ soit identique à $P(z)$.
Montrer que $\cos\theta$ et $\cos\theta'$ sont racines de l'équation

$$X^2 + \frac{a}{2}X + \frac{b-2}{4} = 0.$$

Écrire les inégalités (C') que doivent vérifier a et b pour qu'il existe des angles θ et θ' répondant à la question.

4. On se propose d'interpréter géométriquement les inégalités (C').
Pour cela, on considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, le point M de coordonnées a et b.
Dans quelle région du plan faut-il choisir M pour que les relations (C') soient satisfaites ?
On tracera soigneusement les courbes qui délimitent cette région.

5. Appliquer les résultats précédents à la recherche des racines de l'équation

$$z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0$$

(on déterminera, au préalable, θ et θ').