

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat Caen septembre 1966 ∞
série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

On considère la fonction y définie par l'égalité

$$y = x \sqrt{\frac{x}{x-2}}.$$

1. Calculer sa dérivée, y' , et étudier le sens de variation de y .
2. Montrer que le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers l'infini.
Chercher la limite de $y - x$ quand x tend vers l'infini : on pourra, dans ce but, utiliser l'égalité suivante, que l'on établira :

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 = \frac{2}{(x-2)} \left[\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1 \right].$$

3. Construire la courbe représentative de la fonction y .

II.

1. On donne un angle réel θ . Montrer que l'équation

$$z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$$

admet en général deux racines complexes conjuguées, que l'on notera z_1 et $\overline{z_1}$.

Donner leurs expressions en fonction de θ .

Quel est le module de z_1 ? Examiner le cas où θ est un multiple entier de π .

2. On appellera, de même, z_2 et $\overline{z_2}$ les racines de équation

$$z^2 - 2z \cos \theta' + 1 = 0,$$

où θ' désigne également un angle réel donné.

Calculer en fonction de $\cos \theta$ et $\cos \theta'$, les coefficients a , b , c et d pour que le polynôme

$$P(z) \equiv z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$$

soit identique au polynôme

$$Q(z) \equiv (z - z_1)(z - \overline{z_1})(z - z_2)(z - \overline{z_2}).$$

Montrer que l'on a, dans ces conditions, les relations

$$(C) \quad \begin{cases} a &= c, \\ d &= 1. \end{cases}$$

3. Inversement, on se donne *a priori* les coefficients a , b , c et d , satisfaisant aux conditions (C) et l'on cherche à déterminer des angles θ et θ' tel que $Q(z)$ soit identique à $P(z)$.

Montrer que $\cos \theta$ et $\cos \theta'$ sont racines de l'équation

$$X^2 + \frac{a}{2}X + \frac{b-2}{4} = 0.$$

Écrire les inégalités (C') que doivent vérifier a et b pour qu'il existe des angles θ et θ' répondant à la question.

4. On se propose d'interpréter géométriquement les inégalités (C').

Pour cela, on considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, le point M de coordonnées a et b .

Dans quelle région du plan faut-il choisir M pour que les relations (C') soient satisfaites?

On tracera soigneusement les courbes qui délimitent cette région.

5. Appliquer les résultats précédents à la recherche des racines de l'équation

$$z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 = 0$$

(on déterminera, au préalable, θ et θ').