∽ Baccalauréat Caen septembre 1967 ∾
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Soit les nombres complexes

$$\begin{array}{rcl} Z_1 & = & 1-\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)\\ Z_2 & = & \sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}. \end{array}$$

Calculer $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ (on séparera partie réelle et partie imaginaire).

II.

Soit l'expression

$$y=\frac{\sin x-\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}\quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

1. Exprimer y en fonction de $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.
2. Pour quelles valeurs de x la fonction y est-elle définie ?
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $y=0$?
4. Étudier le signe de y.

III.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

1. On considère la transformation $\mathcal{T}$ qui, au point M de coordonnées x et y, fait correspondre le point $\mathrm{M}'=\mathcal{T}(\mathrm{M})$ de coordonnées x' et y' données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y,\\ y' & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y. \end{array}\right.$$

   a. La transformation $\mathcal{T}$ admet-elle des points invariants ?

   b. Montrer que OM = OM'.

   c. Calculer l'angle des vecteurs OM et OM' et en déduire la nature géométrique de la transformation $\mathcal{T}$.

2. On considère les deux transformations ponctuelles $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ qui au point M font correspondre les points $\mathrm{M}_1=\mathcal{T}_1(\mathrm{M})$ et $\mathrm{M}_2=\mathcal{T}_2(\mathrm{M})$ de coordonnées respectives $\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ et $\left(x_2\ ;\ y_2\right)$ données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y,\\ y_1 & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \end{array}\right.\quad \text{et}\quad \left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & -\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y,\\ y_2 & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y \end{array}\right.$$

   Donner, en fonction de x et y, les coordonnées du point M$''$ transformé par $\mathcal{T}_2$ du point .M_1.
   En déduire que $\mathcal{T}=\mathcal{T}_2\circ\mathcal{T}_1$.
   Montrer que chacune des transformations $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ est involutive.
   En est-il de même pour la transformation $\mathcal{T}$?

3. Montrer que l'ensemble des points invariants de la transformation $\mathcal{T}_1$ est une droite, (D_1) et que, quand le point M varie, la droite MM_1 reste perpendiculaire à (D_1).
Quel est, quand M varie, l'ensemble des milieux des segments MM_1 ?
Quelle est la nature de la transformation $\mathcal{T}_1$?
En déduire celle de la transformation $\mathcal{T}_2$.

4. Donner l'équation de chacune des transformées par $\mathcal{T}$ des figures suivantes :

a. (Γ) est le cercle de centre A$(+4\,;\,+3)$ et de rayon 5, soit $\left(\Gamma'\right)$ son transformé par $\mathcal{T}$;

b. (Δ) est la droite d'équation

$$4x - 3y + 18 = 0;$$

soit $\left(\Delta'\right)$ sa transformée.
Quelles sont les positions relatives de (Γ) et (Δ) ?
En déduire celles de $\left(\Gamma'\right)$ et $\left(\Delta'\right)$.