Caen juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Un nombre s'écrit 1 101 010 011 dans le système binaire. Écrire ce nombre dans le système de base 8.

EXERCICE 2

1. Soit f une fonction définie et continue dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$. On désigne par f_1 la primitive de f telle que $f_1(0) = 0$, par f_2 la primitive de f_1 telle que $f_2(0) = 0$, par f_3 la primitive de f_2 telle que $f_3(0) = 0$.
   On suppose $f(x)$ positive pour x positif. Montrer que $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont positives pour x positif.
2. Si $f(x) = 1 - \text{e}^{-x}$, calculer $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$.
   Établir, pour x positif, la double inégalité

$$1 - x + \frac{x2}{2!} - \frac{x^3}{3!} < \text{e}^{-x} < 1 - x + \frac{x2}{2!}.$$

EXERCICE 3

On donne un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, la droite Δ d'équation $x - y = 0$ et le cercle (O) de centre O et de rayon $a\sqrt{2}$, a étant une longueur donnée.
Soit T la transformation plane qui, à un point M, associe le point M', intersection de la polaire de M par rapport à (O) et de la droite Ou symétrique de OM par rapport à Δ.

1. Étudier géométriquement les questions suivantes :
   a. Quels sont les points du plan qui n'ont pas de transformés par T ?
   b. Quels sont les points invariants de T ?
   T est-elle involutive ?
2. On désigne par x et y les coordonnées de M, par x' et y' celles de M'. Établir les relations

$$xx' = a^2, \quad yy' = a^2.$$

   (On pourra utiliser le produit scalaire $\overrightarrow{\text{O}M} \cdot \overrightarrow{\text{O}M'}$.)
   Retrouver les résultats précédents.
3. Déterminer l'ensemble, E, des points M tels que la droite MM' passe par le point A$(-a~;~0)$ ou que les points M et M' soient confondus.
   E est la réunion d'une droite D et d'une courbe C.
   Montrer que D et C son invariantes dans T.
4. Déterminer l'ensemble, E$'$, des points M tels que la droite MM' soit perpendiculaire à Δ ou que les points M et M' soient confondus.
   E$'$ est la réunion d'une droite D$'$ et d'une courbe C$'$.
   Montrer que D$'$ et C$'$ sont invariantes dans T.
   Montrer que l'ensemble des cercles de diamètre MM' est un faisceau, F_1 lorsque M décrit D$'$ et un faisceau, F_2 lorsque M décrit C$'$. Définir F_1 et F_2 avec précision.

N. B. - Les questions 1. et 2. sont indépendantes.