Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Cambodge et Laos juin 1969 ∾

EXERCICE 1

On considère quatre entiers naturels, a, b, c et d, formant une suite géométrique de raison r. On suppose que r est strictement supérieur à 1 et premier avec a.
Déterminer ces quatre entiers pour qu'on ait la relation

$$10a^2 = d - b.$$

EXERCICE 2

1. On désigne par x un nombre réel. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe
$$z = (x-2)\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$
2. Démontrer que le nombre z^{1968} est réel ; préciser son signe.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x\text{O}y$; on note $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy.
On désigne par t l'application qui, à tout point M de la droite Ox, d'abscisse $x \neq 0$, associe le point M' de cette même droite ayant pour abscisse

$$x' = \frac{4x-3}{x}$$

On écrit, dans ce cas, $M' = t(M)$.

1. Montrer qu'il existe deux points distincts, A et B, sur la droite Ox tels que A = t(A) et B = t(B) ; calculer leurs abscisses.
Démontrer que le birapport (A, B, M, M') est indépendant de la position de M sur la droite Ox.
2. Calculer, en fonction de l'abscisse, x, du point M sur la droite Ox, la longueur, z, du segment MM'.
Étudier les variations de la fonction $z(x)$ ainsi définie ; tracer son graphe.
Utiliser ce graphe pour discuter l'existence et le nombre des points M tels que la longueur MM' ait une valeur donnée, λ.
3. Démontrer que le point $M' = t(M)$ se déduit du point M par une inversion I, de pôle O, de puissance μ, suivie d'une translation de vecteur $k\overrightarrow{\imath}$, les nombres réels μ et k étant à déterminer.
4. On appelle T l'application associant à un point P du plan, distinct de O, le point P$'$ qui s'en déduit par l'inversion de pôle O, de puissance μ, suivie de la translation de vecteur $k\overrightarrow{\imath}$ (les nombres μ et k étant ceux déterminés à la question précédente).
Soit (ω) le cercle de centre $\omega(0\,;\,-1)$ et de rayon 1. Démontrer qu'une tangente (D) à ce cercle a pour image, par l'application T, un cercle, que l'on désignera par (Γ), sauf pour une position singulière de la droite (D).
Démontrer que les cercles (Γ) associés aux diverses tangentes au cercle (ω) passent par un point fixe, O_1, et qu'ils restent tangents à une droite fixe, (Δ), que l'on déterminera.
En déduire l'ensemble des centres de ces cercles.