ൟ Baccalauréat C Cambodge juin 1973 ൟ

EXERCICE 1

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.
On considère le nombre complexe

$$z = -\sin 2\theta + 2\mathrm{i}\cos^2\theta.$$

1. Déterminer le module et l'argument de z en fonction de θ.
2. Déterminer θ pour que z et $1 - z$ aient même module.

EXERCICE 2

Soit n un entier relatif. On considère les deux nombres

$$A = 5n - 9 \quad \text{et} \quad B = 2n - 6.$$

1. Montrer que tout diviseur commun de A et B est diviseur d'un nombre C indépendant de n et que tout diviseur commun de A et C divise B.
   Que peut-on en conclure pour le P. G. C. D. de A et B ?
2. *Application* : Calculer suivant les valeurs de n le plus grand commun diviseur de A et B.

EXERCICE 3

Partie A

Dans un repère orthonormé du plan affine euclidien, on appelle « produit » d'un point M de coordonnées $(x~;~y)$ par le point M$'$ de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ le point N = M * M' dont les coordonnées $(X~;~Y)$ sont telles que

$$X = xx' + yy', \quad Y = xy' + x'y.$$

1. Montrer que ce produit est commutatif et associatif, qu'il existe dans, le plan un point I, élément neutre, et que tout point M non situé sur la réunion des bissectrices des axes possède un symétrique pour l'opération considérée.
   Soit E l'ensemble des points du plan n'appartenant pas à la réunion des deux bissectrices.
   Que peut-on dire du produit de deux points de E ?
   Quelle conclusion peut-on en tirer ?
2. Montrer que tout point A de coordonnées $\left(x_0~;~y_0\right)$ de E peut être considéré comme le produit d'un point A_1 de l'axe des x et d'un point A_2 de la droite d'équation $y + x - 1 = 0$.
   On déterminera les coordonnées des points A_1 et A_2 en fonction de $x_0,~y_0$.

Partie B

Soit A un point fixe de coordonnées $\left(x_0~;~y_0\right)$, à tout point M de coordonnées $(x~;~y)$ du plan, on fait correspondre le point N de coordonnées $(X~;~Y)$ tel que N = A * M.

1. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M.

   Montrer que cette application n'est bijective que si A est un point de E, *ce que l'on supposera par la suite.*

   La transformation ponctuelle correspondante est notée T_A.

   Montrer que T_A est involutive, si et seulement, si le pomt A occupe l'une des 4 positions I, I_1, I_2, I_3 que l'on déterminera.

   Préciser la nature géométrique des transformations correspondantes.

2. Étudier les points invariants de la transformation T_A suivant la position du point A supposé distinct de I(1 ; 0).

   Montrer que si A n'est pas situé sur la réunion de deux droites (D_1) et (D_2) que l'on précisera, T_A possède un point invariant et un seul.

   Montrer que si A est un point de (D_1) ou de (D_2), la transformation correspondante possède une droite de points invariants.

3. On désigne par T'_A toute transformation T_A admettant une droite de points invariants (Δ).

   Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est perpendiculaire à (Δ) en un point H tel que $\overrightarrow{HN} = k\overrightarrow{HM}$, k étant une constante que l'on calculera en fonction de $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$.