Durée : 4 heures

Baccalauréat C Cambodge et Laos septembre 1969

EXERCICE 1

Résoudre, dans l'ensemble, $\mathbb{C}$, des nombres complexes, l'équation

$$z^2 + (9\text{i} - 5)z - 14 - 23\text{i} = 0.$$

EXERCICE 2

Le logarithme népérien de x étant désigné par Log x, on considère les deux fonctions f et g de la variable x définies par

$$f(x) = \text{Log}\,x - x \quad \text{et} \quad g(x) = x\text{Log}\,x - \frac{x^2}{2} - x.$$

1. Préciser le domaine de définition de chaque fonction et montrer que f est la fonction dérivée de g.
2. Étudier les variations de la fonction f et construire son graphe, (C), dans un repère orthonormé.
3. Calculer l'aire comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 2$. (On prendra, pour Log 2, la valeur approchée $0,69$.)

PROBLÈME

Un plan p est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$; un plan P est rapporté à un repère orthonormé d'axes X′OX et Y′OY.

On illustrera éventuellement les questions par deux figures distinctes, l'une relative au plan p, l'autre au plan P.

Soit T l'application du plan p dans le plan P associant à tout point $m(x\,;\,y)$ de p le point M(X ; Y) de P défini par

$$\text{X} = x^2 \quad \text{et} \quad \text{Y} = y^2.$$

On écrira alors $\text{M} = \text{T}(m)$.

1. Définir l'ensemble, E, des points de P qui sont les images par T de points de p.
   Discuter, suivant la position du point M dans le plan P, le nombre et la disposition des points m du plan p tels que $\text{T}(m) = \text{M}$.
2. Dans le plan P on considère les points $\text{A}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $\text{B}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$; on appelle S le segment AB.
   Quelle est l'équation de la droite AB ?
   Quel est l'ensemble, e, des points m du plan p dont l'image $\text{M} = \text{T}(m)$ appartient à S ?
3. Dans le plan P on considère le repère orthogonal d'axes $\text{X}_1'\text{OX}_1$ et $\text{Y}_1'\text{OY}_1$ de même origine que le premier repère, défini de la façon suivante ; relativement au repère d'axes X′OX et Y′OY, le vecteur unitaire $\overrightarrow{\text{I}_1}$ de l'axe $\text{X}_1'\text{OX}_1$ a pour composantes $(+\,1\,;\,+\,1)$; le vecteur unitaire $\overrightarrow{\text{J}_1}$ de l'axe $\text{Y}_1'\text{OY}_1$ a pour composante $(-1\,;\,+1)$.

Exprimer les coordonnées $(X_1\ ;\ Y_1)$ d'un point M de P relativement à ce nouveau repère, en fonction de ses coordonnées $(X\,;\,Y)$ relativement au repère d'axes X′OX et Y′OY.

4. On suppose, dans cette question, que m est, dans le plan p, un mobile dont les coordonnées s'expriment en fonction du temps t par

$$x = t \quad \text{et} \quad y = 1 - t.$$

Exprimer en fonction du temps les coordonnées du mobile $M = T(m)$ par rapport au repère X_1OY_1.

Démontrer que la trajectoire du mobile M dans P est une parabole, dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.

Quelle est l'image par l'application T de la droite du plan p qui a pour équation

$$x + y = 1?$$