

♫ Baccalauréat C Cameroun juin 1971 ♫

EXERCICE 1

Soit (G, T) un groupe, T désignant la loi de composition interne sur l'ensemble G .
Soit a un élément quelconque de G ; on considère l'application de G dans G

$$f_a : x \mapsto aTx.$$

1. Montrer que f_a est une application bijective.
2. Soit F l'ensemble de toutes les applications f_a , où a parcourt G . On munit F de la loi de composition des applications, notée \circ .
On considère l'application $\varphi : a \mapsto f_a$ de G dans F . Montrer que φ est un isomorphisme de (G, T) dans (F, \circ) .

EXERCICE

1. Étudier la fonction réelle de variable réelle, f , définie par

$$f(x) = \frac{\text{Log}(x+1)}{(x+1)^2}.$$

Construire la courbe représentative (Γ) de f .

2. Chercher la dérivée de la fonction F réelle de variable réelle, définie par

$$F(x) = -\frac{\text{Log}(x+1)}{x+1} - \frac{1}{x+1}.$$

En déduire l'aire limitée par (Γ) , l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = X$ (avec $X > 0$).

Cette aire a-t-elle une limite quand X tend vers plus l'infini?

PROBLÈME

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$, c étant un nombre réel donné, non nul.

On considère le point M tel que

$$(\vec{i}, \overrightarrow{FM}) \equiv \varphi [2\pi] \quad \text{et} \quad (\vec{i}', \overrightarrow{F'M}) \equiv \varphi' [2\pi],$$

φ et φ' étant deux nombres réels tels que $\varphi - \varphi'$ ne soit pas un multiple entier de π .

1. On pose $FM = r$ et $F'M = r'$.
Exprimer les coordonnées x et y de M
 - a. en fonction de c, r et φ .
 - b. en fonction de c, r' et φ' .
 - c. En déduire que

$$x = c \cdot \frac{\sin(\varphi + \varphi')}{\sin(\varphi - \varphi')} \quad \text{et} \quad y = c \cdot \frac{\sin \varphi \sin \varphi'}{\sin(\varphi - \varphi')}$$

2. On suppose 1 que, k étant un nombre réel positif, distinct de 1, on a $r' = kr$.
Quelle est l'équation cartésienne de la courbe (C_1) à laquelle appartient alors le point M ? Reconnaitre cette courbe. Interpréter géométriquement ce résultat.
3. Soit α un nombre réel donné, qui n'est pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$. On suppose $\varphi - \varphi' = \alpha [2\pi]$.
Exprimer $rr' \sin(\varphi - \varphi')$ et $rr' \cos(\varphi - \varphi')$ en fonction de x, c et y .
En déduire que le point M appartient à un cercle (C_2) , dont on donnera l'équation.
4. On suppose maintenant que $\varphi + \varphi' \equiv \beta [2\pi]$, β étant un nombre réel différent de tout multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.
- a. Exprimer $rr' \sin(\varphi + \varphi')$ et $rr' \cos(\varphi + \varphi')$ en fonction de x, c et y .
En déduire l'équation cartésienne de la courbe (C_3) à laquelle appartient alors M .
- b. On prend pour nouveau repère le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ déduit du précédent par une rotation $\mathcal{R}\left(O, \frac{\beta}{2}\right)$.
En déduire l'équation de (C_3) dans ce nouveau repère et reconnaître la courbe (C_3) . Préciser ses éléments.