Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Sud Cameroun juin 1972 ∾

EXERCICE 1

Étudier les deux fonctions réelles f et g suivantes, de la variable réelle x :

$$f : x \longmapsto \text{Log}\left|\text{e}^x - 1\right| \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \text{Log}\left(\text{e}^x + 1\right)$$

Tracer les courbes représentatives (F) et (G) dans un repère orthonormé. Montrer que la première bissectrice est axe de symétrie pour l'ensemble $(F) \cup (G)$.

EXERCICE 2

Partie A

L'espace E est un espace vectoriel, de dimension supérieure à 1, sur $\mathbb{R}$. Soit L un automorphisme involutif de E dans E, donc tel que $L \circ L = \text{I}_{\text{E}}$ (application identique de E dans E).

1. Un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul est dit vecteur propre pour L s'il existe un réel λ (appelé valeur propre) tel que $L\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

   Montrer que les valeurs propres, si elles existent, ne peuvent Ítre que 1 et -1.

   Étudier les cas où L est I_{E} c'est-à-dire l'application $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{u}$, et l'application $\overrightarrow{u} \longmapsto -\overrightarrow{u}$.
2. On suppose qu'il existe un automorphisme involutif, L, différent des deux applications précédentes.

   Il existe donc un vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $\overrightarrow{v} + L\left(\overrightarrow{v}\right)$ soit différent de 0 et $\overrightarrow{w}$ tel que $\overrightarrow{w} - L\left(\overrightarrow{w}\right)$ soit différent de 0.

   À quoi $L\left[\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{v} + L\left(\overrightarrow{v}\right)\right)\right]$ et $L\left[\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{w} - L\left(\overrightarrow{w}\right)\right)\right]$ sont-ils égaux?

   En déduire que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre +1 et celui des vecteurs propres associés à la valeur propre -1 ne sont pas vides.

   On appelle $\mathscr{V}$ l'ensemble constitué des vecteurs propres associés à +1 et de $\overrightarrow{0}$, et $\mathscr{W}$ celui constitué des vecteurs propres associés à -1 et de 0.

   Montrer que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Partie B

On suppose que E est l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$, rapporté à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Comment doit-on choisir les réels a, b, c et d pour que a matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ représente un automorpisme involutif, dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$? Déterminer l'ensemble de ces matrices.
2. Soit S l'application linéaire représentée, dans $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, par

$$\begin{pmatrix} m & m+1 \\ 1-m & -m \end{pmatrix}, \quad m \text{ étant un réel}$$

   S est-elle involutive?

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés.
On appellera $\overrightarrow{I}$ un des vecteurs propres associés à $+1$ et $\overrightarrow{J}$ un des vecteurs propres associés à -1. $S\left(\overrightarrow{I}\right) = \overrightarrow{I}$ et $S\left(\overrightarrow{J}\right) = -\overrightarrow{J}$.
Montrer que $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$ est une nouvelle base de l'espace.
Quelle est la matrice de S dans cette nouvelle base ?

3. Dans l'espace affine associé à E, rapporté au repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$, on définit l'application, s, qui, au point M, associe le point $M' = s(M)$, tel que $\overrightarrow{\text{O}M'} = S\left(\overrightarrow{\text{O}M}\right)$.
On appelle (C) la courbe ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = 1,$$

dans ce repère.
Donner, toujours dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$, l'équation de la courbe transformée de (C) par s.
Que peut-on dire de (C) ?