Durée : 4 heures

Baccalauréat C Cameroun septembre 1969

EXERCICE 1

Dans un repère orthonormé $x\text{O}y$, on considère le cercle (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

et le point A de coordonnées (+5 ; +5).

1. Écrire l'équation de la polaire de A par rapport au cercle (C).
2. Déterminer les coordonnées des points de contact avec (C) des tangentes à (C) issues de A.

EXERCICE 2

Résoudre, dans le corps, $\mathbb{C}$, des nombres complexes, l'équation

$$3z^4 + 2z^2 + \text{i} = 0.$$

PROBLÈME

Partie A
medskip
On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$f : (x\ ;\ y) \longmapsto \left(x'\ ;\ y'\right)$$

définie par

$$x' = ax - by \quad \text{et} \quad y' = bx + ay,$$

a et b étant deux nombres réels vérifiant la relation

$$a^2 + b^2 = 1.$$

L'application f est-elle surjective et injective ?
Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications f obtenues en donnant à a et à b toutes les valeurs possibles (avec toujours $a^2 + b^2 = 1$). Montrer que, quels que soient les éléments f et g de $\mathscr{F}$, le composé $g \circ f$ (au sens de la composition des applications) est encore un élément de $\mathscr{F}$ et que $\mathscr{F}$ a une structure de groupe abélien pour cette loi.

Partie B
medskip
Démontrer l'implication

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |b| \leqslant 1.$$

La réciproque est-elle vraie ?
Montrer que l'application f peut se mettre sous la forme trigonométrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x\cos\theta - y\sin\theta,\\ y' &=& x\sin\theta + y\cos\theta.\end{array}\right.$$

Donner la forme de $h = g \circ f$. En déduire celle de

$$f^2 = f \circ f.$$

Démontrer par récurrence que la forme de f^n est

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& x\cos n\theta - y\sin n\theta,\\ y' &=& x\sin n\theta + y\cos n\theta.\end{array}\right.$$

Application numérique :

$$f : \left\{\begin{array}{l c l} x' &=& \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y),\\ y' &=& \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\end{array}\right. \qquad g : \left\{\begin{array}{l c l} X' &=& \dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{3}y\right),\\ Y' &=& \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}x+y\right).\end{array}\right.$$

Calculer le produit $h = g\circ f$. Calculer le produit $h = g\circ f$ lorsque f et g sont écrites sous forme trigonométrique et déduire des calculs précédents les valeurs $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\pi 12$.

Partie C

Soit un repère orthonormé de vecteurs unitaires $\overrightarrow{\imath}\,(1~;~0)$ et $\overrightarrow{\jmath}\,(0~;~1)$ et les points $M(x~;~y)$ et $M'(x'~;~y')$ avec

$$M' = f(M) \quad \left\{\begin{array}{l c l} x' &=& ax-by\\ y' &=& bx+ay\end{array}\right.$$

Montrer que, si M décrit la droite (D), d'équation

$$ux+vy+w=0,$$

M' décrit une droite (D$'$) dont on formera l'équation.
Montrer que le birapport de 4 points M_1, M_2, M_3, M_4 de (D) s'exprime uniquement en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4 ou y_1, y_2, y_3, y_4 (coordonnées respectives de ces points).
Montrer que $(M_1, M_2, M_3, M_4) = \left(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4\right)$.
On rappelle que le birapport de quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 est le nombre

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}$$