

## ∞ Baccalauréat C Cameroun du Nord juin 1973 ∞

### EXERCICE 1

Cinq nombres entiers positifs,  $a, b, c, d, e$ , dans cet ordre ( $a \leq 100$ ) forment une progression géométrique dont la raison est un nombre entier supérieur à 1 et premier avec  $a$ . Déterminer ces cinq nombres de façon que

$$6a^2 = e - b.$$

### EXERCICE 2

Dans l'espace vectoriel euclidien  $E_2$  de dimension 2 muni de la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , on considère l'application linéaire  $f$  de  $E_2$  dans  $E_2$  définie par sa matrice  $M$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

#### Partie A

1. Quelle est l'image  $\vec{u}'(x'; y')$  du vecteur  $\vec{u}(x; y)$  par  $f$ ?
2. Quelle est la nature de l'application  $f$ ?

#### Partie B

Dans l'espace affine euclidien  $\mathcal{E}_2$  associé à  $E_2$  et muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère l'application  $\Phi$  qui au point  $M(x; y)$  de  $\mathcal{E}_2$  fait correspondre le point  $M'(x'; y')$  de  $\mathcal{E}_2$ , définie par

$$M' = \Phi(M) \iff \overrightarrow{OM'} = f(\overrightarrow{OM}).$$

1. Écrire les relations existant entre les coordonnées du point  $M$  et celles du point  $M'$ .
2. Quelles sont les images par  $f$  de la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$ , du cercle  $(C)$  d'équation  $x^2 + y^2 = 4$ ?

#### Partie C

L'espace euclidien  $\mathcal{E}_2$  est maintenant assimilé au plan complexe. On désigne par  $z$  et  $z'$  les affixes respectives des points  $M$  et  $M'$  de  $\mathcal{E}_2$ .

1. Écrire la relation existant entre  $z$  et  $z'$  lorsque  $M' = \Phi(M)$ .
2. En déduire la nature de l'application  $\Phi$ . Justifier alors les résultats du **B, 2**.

### EXERCICE 3

#### Partie A

1. On considère les fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par

$$t \mapsto f(t) = -2e^{-t} \quad \text{et} \quad t \mapsto g(t) = 2e^{-2t}$$

- a. Déterminer la primitive de  $f$  qui prend la valeur  $\frac{2}{e}$  pour  $t = 1$ .
- b. Déterminer la primitive de  $g$  qui prend la valeur  $1 - \frac{1}{e^2}$  pour  $t = 1$ .
2. On considère les fonctions  $h$  et  $k$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par

$$t \mapsto h(t) = 2e^{-t} \quad \text{et} \quad t \mapsto k(t) = -e^{-2t} + 1.$$

- a. Déterminer la primitive de  $h$  qui prend la valeur  $-2$  pour  $t = 0$ .
- b. Déterminer la primitive de  $k$  qui prend la valeur  $\frac{1}{2}$  pour  $t = 0$ .

### Partie B

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ,  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ , l'unité étant le centimètre, un point M dont le vecteur accélération  $\vec{\Gamma}$  en fonction du temps  $t$  est

$$\vec{\Gamma} = -2e^{-t}\vec{i} + 2e^{-2t}\vec{j}.$$

1. Déterminer les composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}(t)$  du point M en fonction de  $t$ , sachant qu'à l'instant  $t = 5$  on a  $\vec{V}(5) = \frac{2}{e}\vec{i} + \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\vec{j}$ .
2. Calculer en fonction de  $t$  les coordonnées du point M sachant qu'à l'instant  $t = 0$  le point M a pour coordonnées  $x_0 = 1$  et  $y_0 = \frac{1}{2}$ .  
Déterminer alors les coordonnées du point M à l'instant  $t = 1$  et à l'instant  $t = -1$ .  
Donner l'équation cartésienne de la trajectoire du point M.  
Construire cette trajectoire.  
À quel instant  $t$ , le point M a-t-il une abscisse égale à  $-1$ ?  
Calculer la valeur correspondante de son ordonnée.
3. Déterminer et construire l'hodographe du mouvement.
4. a. Calculer la norme du vecteur vitesse à l'instant  $t$ , notée  $\|\vec{V}(t)\|$ .  
b. On rappelle que la longueur de la trajectoire décrite par le point M entre les temps  $t = 0$  et  $t = t_0$  ( $t_0 > 0$ ) est

$$s(t_0) = \int_0^{t_0} \|\vec{V}(t)\| dt.$$

Calculer  $s(t_0)$ .

Calculer  $s(1)$ .

**N. B.** - La lettre  $e$  désigne la base des logarithmes népériens; l'unité de temps est la seconde; on donne

$$e \approx 2,72; \quad e^{-1} \approx 0,37; \quad e^2 \approx 7,39; \quad e^{-2} \approx 0,13.$$