Baccalauréat C Cameroun du Sud juin 1973

EXERCICE

Soit f la fonction de la variable réelle définie par :

$$f(x) = (x+2)\text{e}^{\frac{1}{x}}$$

où e est la base de logarithmes népériens.

1. Étudier cette fonction.

2. Tracer la courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unité 2 cm sur l'axe des abscisses et un centimètre sur l'axe des ordonnées.
On prendra $\text{e} \approx 2,72$ et $\text{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1,65$.

PROBLÈME

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel sur R, de dimension 2 et E l'espace affine associé à $\mathscr{E}$.
L'objet du problème est d'étudier les applications linéaires f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ (resp. affines g de E dans E) telles que : $f^3 = f \circ f \circ f = \text{id}_{\mathscr{E}}$ (application identique de $\mathscr{E}$) (resp. $g^3 = g \circ g \circ g = \text{id}_{\mathscr{E}}$ (application identique de E))

Partie A

Soit f un endomorphisme de $\mathscr{E}$, tel que $f^3 = \text{id}_{\mathscr{E}}$.

1. Calculer le déterminant de f. En déduire que f est un automorphisme de $\mathscr{E}$.

2. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathscr{E}$, tel que $f\left(\vec{u}\right) = \vec{u}$.

a. Etant donné un vecteur $\vec{v}$ tel que $\left(\vec{u},\,\vec{v}\right)$ soit une base de $\mathscr{E}$, on pose

$$f\left(\vec{v}\right) = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

Écrire $f^2\left(\vec{v}\right)$ sur la base $\left(\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

b. Montrer que s'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que :

$$f\left(\vec{u}\right) = \vec{u}$$

alors $f = \text{id}_{\mathscr{E}}$.

3. On suppose $f \neq \text{id}_{\mathscr{E}}$.

a. Montrer que si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, alors $\vec{v}$ et $f\left(\vec{u}\right)$ sont linéairement indépendants.

b. En déduire que si $\vec{i}$ est non nul, $\left(\vec{i},\,f\left(\vec{i}\right)\right)$ est une base de $\mathscr{E}$.

c. Montrer que dans cette base de $\mathscr{E}$,la matrice de f est de la forme :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

et montrer qu'on a nécessairement $a = b = -1$.

4. Application : soit

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de f dans une base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ de $\mathscr{E}$.

a. Vérifier que $f^3 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

b. Écrire la matrice de f dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\ f\left(\vec{\imath}\right)\right)$ et vérifier ainsi le résultat de 3. c.

Partie B

Soit g une application affine de E dans E, et f l'application linéaire associée à g. On supposera que :

$$g^3 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}.$$

1. Montrer que $f^3 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

2. Montrer que g ne peut être une translation de vecteur non nul.

3. On suppose $g \neq \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

a. Montrer que $f \neq \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

b. M étant un point de E tel que $g(M) \neq M$, montrer que $\left(M,\ g(M),\ g^2(M)\right)$ est un repère affine de E.

c. Soit O le barycentre des points : M, $g(M)$, $g^2(M)$, chacun étant affecté du coefficient 1. Montrer que O est le seul point de E invariant par g.

Partie C

On suppose que $\mathscr{E}$ et E sont euclidiens. Soit $\left(\vec{\imath}\,,\ f\left(\vec{\imath}\right)\right)$ une base orthonormée directe de $\mathscr{E}$, et soit f un endomorphisme orthogonal de $\mathscr{E}$, tel que :

$$f^3 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}.$$

1. Montrer que f est une rotation.

2. Soit t, $\quad 0 \leqslant t < 2\pi$, le réel mesurant l'angle associé à la rotation f.

a. Écrire la matrice de f dans $\left(\vec{\imath}\,,\ f\left(\vec{\imath}\right)\right)$.

b. Quelles valeurs peut prendre t ?