

Ce sujet est formé de trois parties indépendantes et comporte deux documents joints

PROBLÈME 1 : ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ET ÉTUDE DE FONCTION

Partie A : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 2y = 4x.$$

1.
 - a. Vérifier que la fonction f'' définie sur \mathbb{R} par $f''(x) = 2x - 1$ est une solution particulière de l'équation (E).
 - b. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - f''$ est solution de l'équation différentielle $y' = -2y$.
 - c. En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions f_k , définies sur \mathbb{R} par $f_k(x) = k e^{-2x} + 2x - 1$, où $k \in \mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère donné.

2. Vrai-Faux

Préciser si chacune des quatre propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- a. Pour tout réel k , la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe \mathcal{C}_k .
- b. Pour tout réel k non nul, la courbe \mathcal{C}_k ne possède pas de point d'inflexion.
- c. Pour tout réel $k > 0$, la courbe \mathcal{C}_k admet un sommet qui appartient à la droite d'équation $y = 2x + 1$.
- d. Il existe une valeur du réel k tel que \mathcal{C}_k passe par A(0; 2).

Partie B : étude d'une fonction solution de (E)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 3e^{-2x} + 2x - 1$$

1.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b. Justifier que pour tout réel x , $f(x) = \frac{3 + 2e^{2x}}{e^{2x}} - 1$.
En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.

c. Établir le tableau de variations de f dans \mathbb{R} . On fera apparaître les limites et les valeurs particulières.

2. Étude de l'équation $f(x) = 8$

a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1; 10]$.

b. Le script ci-dessous, rédigé en langage Python, définit une fonction solution.

```

from math import exp
def f(x)
    return 3*exp(-2*x)+2*x-1

def solutions(a,b)
    while b-a>0.1:
        m=(a+b)/2
        if f(m)<8:
            a=m
        else:
            b=m
    return a,b

```

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en exécutant la fonction solution(4, 5) pas à pas :

a	4				
b	5				
$b - a$					
m					
Condition $f(m) < 8$					

c. Que permet de déterminer la fonction solution(a , b) dans le contexte de l'exercice?

3. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.

PROBLÈME 2 : NOMBRES COMPLEXES

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, chaque point et chaque vecteur peut être identifié par ses coordonnées ou par son affixe dans \mathbb{C} .

Préliminaires

1. Soit un vecteur \vec{u} d'affixe z et un vecteur \vec{v} d'affixe $i \times z$.

Démontrer que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

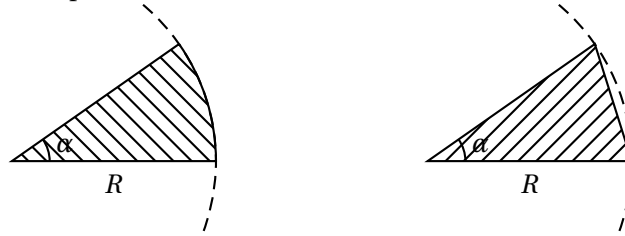
2. Soit deux vecteurs \vec{u} d'affixe $z = x + iy$ et \vec{v} d'affixe $z' = x' + iy'$, où x, y, x', y' sont des nombres réels.

Démontrer que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(z \times \overline{z'})$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe non nul.

Démontrer que z est un imaginaire pur si et seulement si $-\frac{1}{z}$ est imaginaire pur.

4. Exprimer chacune des deux aires suivantes en fonction de R et α , où α est une mesure de l'angle en radians comprise entre 0 et 2π .



Les parties A et B sont indépendantes

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et F d'affixes respectives :

$$a = i, \quad b = -1 + i, \quad c = 3i, \quad f = -1.$$

Partie A : construction d'un œuf

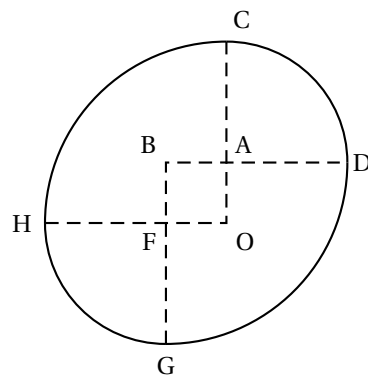
On considère les points D, G et H d'affixes respectives d, g et h , vérifiant :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AD}} &= -iz_{\overrightarrow{AC}} \\ z_{\overrightarrow{BG}} &= -iz_{\overrightarrow{BD}} \\ z_{\overrightarrow{OH}} &= -iz_{\overrightarrow{OG}} \end{aligned}$$

1. Prouver que $d = 2 + i$. Déterminer les affixes g et h .
2. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.
3. On trace les quarts de cercle suivants :

- de centre A, reliant C à D;
- de centre B, reliant D à G;
- de centre F reliant G à H;
- de centre O, reliant H à C.

Ces quarts de cercles semblent former un œuf.
Déterminer l'aire de l'œuf.



Partie B : un rectangle

Soit M un point, distinct de O et A , d'affixe m .

On considère les points N, P et Q d'affixes respectives n, p et q , vérifiant :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AN}} &= -iz_{\overrightarrow{AM}} \\ z_{\overrightarrow{BP}} &= -iz_{\overrightarrow{BM}} \\ z_{\overrightarrow{OQ}} &= -iz_{\overrightarrow{OM}} \end{aligned}$$

1. Prouver que $n = -1 + i - im$, que $p = -1 - m + i$ et que $q = im$.
2. Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.
3.
 - a. Démontrer que $\arg\left(\frac{m-n}{p-n}\right) = (\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}) [2\pi]$.
 - b. En déduire que le quadrilatère MNPQ est un rectangle si et seulement si $\frac{m-n}{p-n}$ est un imaginaire pur.
 - c. Démontrer l'égalité : $\frac{m-n}{p-n} = -i + \frac{1}{-m}$.
 - d. En utilisant la question 3. de la partie *Préliminaires*, déterminer l'ensemble (Δ) des points M tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle.

Partie C : un œuf dans un œuf

On souhaite placer un œuf dans un œuf, comme dans la figure ci-contre, en utilisant le même procédé que dans la partie A. On a placé le point L de coordonnées $(1; 1)$.

1. Grâce à la représentation graphique ci-contre, donner les affixes des points L, R, S et T.
2.
 - a. Déterminer les aires des deux parties foncées représentées ci-contre (entre le côté du rectangle et l'arc de cercle).
 - b. Donner le rapport de ces aires.

PROBLÈME 3 : ARITHMÉTIQUE

1.
 - a. Donner la liste des entiers naturels qui divisent 210.
 - b. Déterminer de deux façons différentes le plus grand diviseur commun de 175 et 210.
2. Un fleuriste reçoit d'un fournisseur un lot de 210 tulipes. Il souhaite faire des bouquets de 18 tulipes.
Déterminer s'il est possible de répartir l'intégralité des fleurs.
3. Un deuxième fournisseur livre 175 œillets.
 - a. Déterminer si le fleuriste peut confectionner des bouquets tous identiques en utilisant tous les œillets et toutes les tulipes.
 - b. Combien peut-il ainsi en constituer le plus possible?
4. Le premier fournisseur passe tous les 22 jours et il est venu il y a 3 jours. Le second fournisseur passe tous les 16 jours et il est passé hier. Le fleuriste souhaite savoir combien de fois les deux fournisseurs passeront le même jour durant les 365 jours à venir.
 - a. Justifier que répondre au problème posé revient à résoudre l'équation diophantienne $(E) : 11x - 8y = 1$, où x et y sont deux entiers relatifs.
 - b. Trouver une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E) .
 - c. Montrer que si $(x; y)$ est solution de (E) alors il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 8k$ et $y - y_0 = 11k$.
 - d. En déduire les couples $(x; y)$ solutions de (E) .
 - e. Déterminer combien de fois les deux fournisseurs passeront le même jour durant les 365 jours à venir.

PROBLÈME 4 : CONFIGURATION DU PLAN ET VECTEURS

Soit ABC un triangle non aplati. Soit a et b deux nombres réels avec $a > 1$ et $b > 1$.

On définit les points I et J par $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{b}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AC}$.

1.
 - a. Justifier que $\overrightarrow{CJ} = \frac{a-1}{a}\overrightarrow{CA}$.
 - b. En déduire que $\overrightarrow{BJ} = \frac{a-1}{a}\overrightarrow{CB}$.
 - c. De la même façon, exprimer \overrightarrow{AI} en fonction des vecteurs \overrightarrow{CA} et \overrightarrow{CB} .
2.
 - a. Montrer qu'il existe un unique point K vérifiant

$$(a-1)\overrightarrow{KA} + (b-1)\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}.$$

- b. En déduire que ce point est sur le segment [AB].
 - c. Justifier que $(a+b-2)\overrightarrow{CK} = (a-1)\overrightarrow{CA} + (b-1)\overrightarrow{CB}$.
3. Soit G le point défini par $\overrightarrow{KG} = \frac{1}{a+b-1}\overrightarrow{KC}$.
 - a. Démontrer que $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{a+b-1} \left[(a-1)\overrightarrow{CA} + (b-1)\overrightarrow{CB} \right]$.
 - b. Exprimer \overrightarrow{BG} en fonction des vecteurs \overrightarrow{CA} et \overrightarrow{CB} .
 - c. En déduire que les points B, G et J sont alignés.
 - d. On admet que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b-1}\overrightarrow{AI}$.
Que peut-on dire du point G? Justifier.
4. Étude de cas particuliers
 - a. Si $a = b$, déterminer la position du point K.
 - b. Si $a = b = 2$, déterminer la position des points I et J. Que représente dans ce cas le point G?