CAPES externe Mayotte Épreuve 2 31 mars 2026

PROBLÈME 1 : VRAI – FAUX

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Proposition :** si chaque année le prix d'un article augmente de 19%, alors le prix de cet article aura plus que doublé en 4 ans.
2. **Proposition :** l'écart-type de la série -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 est égal à 4.
3. Une association emploie trois salariés. Leur salaire moyen est de 1 758 €, leur salaire médian est de 1 925 €, et l'étendue des salaires est de 900 €. L'association recrute une quatrième personne, ce qui fait passer le salaire moyen à 1 931,50 €.

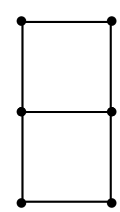
   Proposition : le salaire de la 4$^{\text{e}}$ personne est inférieur à 2 450 euros.
4. **Proposition :** pour tout réel $x \geqslant 1$, $\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2 = 2x$.
5. **Proposition :** les réels x vérifiant $4x^2 9$ sont les réels de l'intervalle $[2\,;3]$.
6. Soit a et b deux nombres réels non nuls.

   Proposition : si $a \geqslant 2b$, alors $a^2 \geqslant 2ab$.
7. **Proposition :** si un entier a est divisible par les entiers b et c, alors il est divisible par le produit bc.
8. **Proposition :** si n est un entier impair, alors $n^2 \equiv 1 \pmod 4$.
9. On lance un dé équilibré à six faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6. Soit A l'évènement « obtenir 1, 2, 3 ou 4 » et B l'évènement « obtenir 4 ou 5 ».

   Proposition : A et B sont indépendants.
10. Soit A et B deux évènements.

    Proposition : si $P(A)+P(B)=1$, alors $A \cup B$ est un évènement certain.
11. La variable aléatoire Y suit une loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart type σ inconnu.

    Proposition : si $P(-6 < Y < 6) = 0{,}86$ alors $P(Y < 6) = 0{,}93$.
12. Un caractère d'écriture en braille est formé de trous obtenus en piquant une feuille de papier à travers au moins l'un des 6 points de la grille ci-contre :

    Proposition : on peut créer exactement 15 caractères ayant 4 trous.
13. **Proposition :** on peut construire un rectangle d'aire 7 cm^2 et de périmètre 12,5 cm.
14. **Proposition :** soit p un nombre réel. L'équation $x^2+(p+1)x+1=0$, d'inconnue x, n'admet pas de solution réelle si et seulement si $p \in]-3\,;1[$.

    Dans un repère orthonormé, les coordonnées des points A et B sont respectivement $(3\,;7)$ et $(-1\,;1)$.
15. **Proposition :** une équation de la droite (AB) est $3x-2y+5=0$.

16. **Proposition :** une équation du cercle de diamètre [AB] est

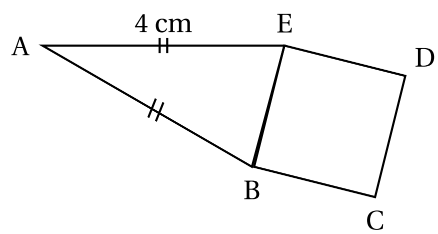
$$x^2+y^2-2x-8y+4=0.$$

17. **Proposition :** sur $[0\,;+\infty[$, la courbe d'équation $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ est au-dessus de la parabole $y=x^2$.

18. **Proposition :** l'équation $x^3+x+1=0$ admet une unique solution sur $[-1\,;0]$.

19. Sur la figure ci-dessous, la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{BAE}}$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

Proposition : l'aire du domaine formé par le triangle isocèle EAB et le carré BCDE est supérieure à 8 cm^2.



20. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Soit A le point d'affixe $14-6\mathrm{i}$ et B le point d'affixe $4-10\mathrm{i}$.

Proposition : le triangle OAB est un triangle rectangle isocèle.

PROBLÈME 2 : FONCTION NUMÉRIQUE ET CALCUL INTÉGRAL

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(\dfrac{1}{2} - \ln(x)\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. a. Démontrer que f est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Démontrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$. Interpréter graphiquement.
4. a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = 2x\big(1 - \ln(x)\big)$.
   b. Établir le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   On fera apparaître les limites et les valeurs particulières.
   c. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. On admet que pour tout réel $x > 0$, on a : $f''(x) = -2\ln(x)$.
   a. Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion ayant pour abscisse 1 et en donner une interprétation graphique.
6. Représenter sur la copie la droite (Δ) ainsi que l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ en tenant compte des résultats des questions précédentes.

Partie B : calcul d'une aire

Pour tout $\lambda \in\,]0\,;\,\mathrm{e}]$, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3}\ln(\lambda) - \frac{11}{36}\lambda^3 + \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{\frac{9}{2}}.$$

2. Déterminer sans justifier un domaine du plan ayant pour aire $I(\lambda)$ en unités d'aire.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0^+} I(\lambda)$. Interpréter ce résultat en termes d'aire et hachurer le domaine correspondant sur le graphique de la partie A, question 6.

PROBLÈME 3 : PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET SUITES NUMÉRIQUES

Partie A : probabilités conditionnelles

Lors d'une séance d'entraînement, une joueuse de basketball s'entraîne à marquer des paniers. On admet que la probabilité de réussir son 1$^{\text{er}}$ tir est de 0,7. On admet de plus que :

— Lorsqu'elle a réussi un tir, la probabilité de réussir le tir suivant devient alors de 0,9 ;

— Lorsqu'elle a raté un tir, la probabilité de réussir le tir suivant n'est plus alors que de 0,4.

On note R_n l'évènement « la joueuse réussit le n-ième tir » et $\overline{R_n}$ son évènement contraire. On note enfin $p_n = P(R_n)$. Ainsi $p_1 = 0,7$.

1. Démontrer que $p_2 = 0,75$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $p_{n+1} = 0,5\,p_n + 0,4$.

Partie B : étude d'une suite

Dans cette partie, il s'agit d'étudier la suite (p_n) définie par $p_1 = 0,7$ et $p_{n+1} = 0,5\,p_n + 0,4$ pour tout entier naturel n non nul.

1. a. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,8.$$

b. Déduire de la question précédente que la suite (p_n) est convergente.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = p_n - 0,8$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_1.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = 0,8 - 0,1 \times 0,5^{n-1}.$$

c. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de la partie A.

3. Le script ci-dessous, écrit en langage Python, est destiné à déterminer le nombre minimal n de tirs pour que la probabilité P que la joueuse réussisse le n-ième tir dépasse le seuil S.

```
def seuil(S):
n = 1
P = 0.7
while ......:
n = ......
P = ......
return n
```

a. Recopier ce script sur la copie et compléter les pointillés.

b. On exécute le script en prenant pour `S` la valeur `0.799`.
Pourquoi est-on sûr que le programme s'arrête ?

c. Donner sans justifier la valeur retournée par `seuil(0.799)`.

PROBLÈME 4 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

L'espace est rapporté à un repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\text{k}}\right)$.
On utilisera les définitions suivantes :

— Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé **médiane**.

— Un tétraèdre est de **type 1** si ses faces ont la même aire.

— Un tétraèdre est de **type 2** si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

— Un tétraèdre est de **type 3** si chaque médiane est orthogonale à la face opposée.

— Enfin, un tétraèdre est de **type 4**, ou **régulier**, si ses six arêtes ont la même longueur.

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie A : étude d'un tétraèdre

On considère les points suivants de l'espace :

$$\text{O}(0 ; 0 ; 0), \quad \text{A}(1 ; 0 ; 0), \quad \text{B}(1 ; 1 ; 0), \quad \text{C}(0 ; 1 ; 0),$$

$$\text{E}(1 ; 1 ; 1), \quad \text{F}(0 ; 1 ; 1), \quad \text{G}(0 ; 0 ; 1).$$

On admet que la droite (DC) est orthogonale au plan (AGE). On note I le point d'intersection de la droite (DC) et du plan (AGE).

1. Déterminer une équation du plan (AGE).

2. Déterminer une équation paramétrique de la droite (DC).

3. Déterminer les coordonnées du point I.

4. Démontrer que la droite (DC) est une médiane de la face (AGE) dans le tétraèdre ADGE.

5. Justifier si le tétraèdre AGED est :

a. de type 1.
b. de type 2.
c. de type 3.
d. de type 4.

Partie B : construction d'un tétraèdre de type 2

On considère les points suivants de l'espace :

$$\text{A}(0 ; 0 ; 1), \quad \text{B}(1 ; b ; 0), \quad \text{C}(1 ; c ; 0), \quad \text{O}(0 ; 0 ; 0).$$

1. Trouver une relation entre b et c pour que le tétraèdre OABC soit de type 2.

2. Donner un exemple de tétraèdre de type 2 grâce à cette relation.