Baccalauréat C Centres d'Outre-Mer juin 1973

EXERCICE 1

On lance un dé non pipé (dont les faces sont numérotées de 1 à 6) trois fois de suite et l'on désigne par a, b et c les résultats respectifs du premier, second et troisième jet.
On considère l'équation sur $\mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Quelle est la probabilité pour que cette équation ait une racine double ?

EXERCICE 2

1. Donner la valeur de

$$\lim_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Former le tableau de variation de la fonction f :

$$x \longmapsto x\mathrm{Log}x.$$

   Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Former alors le tableau de variation de la fonction g

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\mathrm{Log}x.$$

   Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 3

Dans tout ce qui suit, E est un espace vectoriel de dimension 2 dont on appelle $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ une base.

Partie A

f étant une application de E dans E telle que

$$(1) \qquad \forall \overrightarrow{X} \in \mathrm{E}, \quad (f \circ f)\left(\overrightarrow{X}\right) = -\overrightarrow{X},$$

montrer que f est une bijection.

Partie B

f étant une *application linéaire* de E dans E vérifiant (1), montrer que, sauf si $\overrightarrow{X}$ est égal à l'élément neutre $\overrightarrow{0_{\mathrm{E}}}$ de l'addition dans E, $\overrightarrow{X}$ et $f\left(\overrightarrow{X}\right)$ sont nécessairement indépendants.

Partie C

1. Soit l'application linéaire f_1 de E dans E définie par la matrice suivante, dans $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

   calculer la matrice de $f_1 \circ f_1$ et en déduire que f_1 satisfait à la condition (1).

2. $\overrightarrow{X_0}$, étant donné dans E par ses composantes a et b telles que

$$\overrightarrow{X_0} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2},$$

montrer qu'on peut en général lui faire correspondre une application linéaire f de E dans E satisfaisant à (1) et pour laquelle on ait

$$f\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{X_0}.$$

Pour cela, on cherchera la matrice de f dans la base $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.
Discuter suivant les données a et b.
Peut-on, sur la matrice trouvée, vérifier que f est une application bijective ?

Partie D

E étant, de plus, supposé euclidien, et $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ étant une base orthonormée, chercher les isométries satisfaisant à (1).