Baccalauréat A1 Centres étrangers juin 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et, pour tout } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{2}.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
   La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier vos réponses.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = 3 - u_n$.
   - **a.** Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
     Exprimer v_n en fonction de n .
   - **b.** En déduire u_n en fonction de n.
   - **c.** Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne A contient trois boules : 1 rouge, 1 bleue et 1 noire.
Une urne B contient trois boules : 1 rouge et 2 noires.
Une urne C contient trois boules : 2 bleues et 1 noire.
On tire une boule, au hasard, de chaque urne.
On suppose que, dans chaque urne, les tirages sont équiprobables.

1. **a.** Quelle est la probabilité P0 de n'obtenir aucune boule noire ?
   - **b.** Quelle est la probabilité P1 d'obtenir exactement 1 boule noire ?
   - **c.** Quelle est la probabilité P2 d'obtenir exactement 2 boules noires ?
   - **d.** Quelle est la probabilité P3 d'obtenir 3 boules noires ?
2. Si on tire exactement 1 boule noire, on perd 1 point.
   Si on tire 0 ou 2 boules noires, on gagne 0 point.
   Si on tire 3 boules noires, on gagne 3 points.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à tout tirage associe le gain réalisé.
   - **b.** Calculer l'espérance mathématique de X.
     La règle du jeu est-elle favorable au joueur ?

PROBLÈME **5 points**

La courbe (C) donnée ci-après représente dans le repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\text{e}^{2x} + 8(1 - x)\text{e}^{x} - 1.$$

(unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.)

1. Par une lecture graphique :
   - **a.** Déterminer les valeurs de la dérivée $f'(x)$ pour $x = 0$ et $x = \ln 4$.

b. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x = -1$ et pour $x = 1$.

c. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement, d'amplitude 10^{-1}, du nombre x_0 solution de l' équation $f(x) = 0$.

2. On complète, par le calcul, l'étude de la fonction f

a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on remarquera que $x\mathrm{e}^{2x} = x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x}$).
En déduire que la courbe (C) admet une asymptote que l'on précisera.

b. Montrer que, pour tout x non nul,

$$f(x) = x\mathrm{e}^{2x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{8}{x\mathrm{e}^{x}} - \frac{8}{\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{x\mathrm{e}^{2x}}\right).$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Le but de cette partie est de déterminer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré sur le graphique.

a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(x-1).$$

Calculer $g'(x)$.
En déduire $\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.