Baccalauréat C Centres étrangers juin 1987 [1]

EXERCICE 1 **4 POINTS**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit A (6 ; 0 ; 0) et B(0 ; 6 ; 0). Faire une figure.

1. Déterminer le barycentre G du système (O, 1), (A, 2), (B, 3). Le placer sur la figure.
2. Soit C(0 ; 0 ; 4). Déterminer l'ensemble S des points M de l'espace définis par

$$\left(\overrightarrow{M\text{O}} + 2\,\overrightarrow{M\text{A}} + 3\,\overrightarrow{M\text{B}}\right) \cdot \overrightarrow{M\text{C}} = 0.$$

   Donner une équation cartésienne de S.
3. Déterminer l'intersection de S et du plan d'équation $x = 0$.
   Dessiner cette intersection sur la figure.
4. Soit P l'ensemble des points M de l'espace tels que $M\text{O}^2 + 2M\text{A}^2 - 3M\text{B}^2 = 24$. Montrer que G appartient à P. Déterminer P.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Étant donné trois nombres réels strictement positifs α, β et γ on rappelle qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle dont les côtés mesurent respectivement α, β et γ est que :

$$|\alpha - \gamma| < \beta < \alpha - \gamma.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité 1 cm. a est un réel donné strictement positif. On prendra pour la figure $a = 2$.

1. On appelle R, l'ensemble des points M du plan de coordonnées x et y tels qu'il existe un triangle ABC dont les côtés AB, BC et CA mesurent respectivement $2a$, y et x.
   Montrer que R est formé des points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient

$$|2a - x| < y < 2a + x.$$

   Représenter R sur la figure.
2. Quel est l'ensemble des points M de R tels que le triangle ABC soit isocèle (on envisagera les différents cas possibles).
   Représenter cet ensemble sur la figure.
3. Quel est l'ensemble des points M de R tels que le triangle ABC soit rectangle en C ? Le représenter sur la figure.

1. Italie, Turquie, Koweit, Abu Dhabi, Portugal

4. Montrer que l'ensemble des points M de R tels que le triangle ABC soit rectangle en A, est inclus dans l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y^2 - x^2 = 4a$.
Déterminer les coordonnées de ses sommets et préciser ses asymptotes.
Construire $\mathcal{H}$ toute entière sur la figure.

PROBLÈME 11 POINTS

m étant un nombre réel, on appelle f_m l'application de $]0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui, à x, associe

$$f_m(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2}\ln x$$

et $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (on choisit pour unité de longueur 5 cm).

A. - L'objet de la partie A est l'étude de f_m.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_m(x)$.
Calculer, suivant les valeurs de m, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_m(x)$.

2. Calculer $f'_m(x)$ et donner suivant les valeurs de m, les différents tableaux de variations possibles.

3. **a.** Montrer que, par un point $M_0\left(x_0\,;\,y_0\right)$ vérifiant $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$, il passe une et une seule courbe $\mathcal{C}_m$.

b. Montrer qu'il existe un point unique A appartenant à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$.

4. Construire $\mathcal{C}_m$, $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_{-1}$.

B. - Dans la partie B, on considère la fonction f_4 telle que

$$f_4(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2\ln x.$$

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit $x > 0$.

a. Calculer

$$\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t.$$

(on pourra utiliser une intégration par partie).

b. Calculer

$$F(x) = \int_x^1 f_4(t)\,\mathrm{d}t.$$

c. Chercher $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x)$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.

2. **a.** Montrer que l'équation $f_4(x) = 0$ possède deux solutions et deux seulement dont l'une x_0 appartient à $[3\,;\,4]$ (on ne demande pas de calculer x_0 ici).

Montrer que $x_0 = \sqrt{1+8\ln x_0}$.

b. Soit φ : $\begin{array}{rcl} [3\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \sqrt{1+8\ln x} \end{array}$

Montrer que

$$\varphi(x) \geqslant 3.$$

$$\text{et que} \quad 0 \leqslant \varphi'(x) \leqslant \frac{4}{9}.$$

c. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi\left(u_n\right) = \sqrt{1+8\ln(u_n)}.$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 3.$$

d. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - x_0| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - x_0|$.

(On appliquera l'inégalité des accroissements finis.)

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - x_0| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$; en déduire la convergence de (u_n).

Trouver un entier n_0 tel que $\left|u_{n_0} - x_0\right| < 10^{-2}$. Calculer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.