Baccalauréat C Centres étrangers juin 1988 [1]

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{I} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit α un réel non nul. On désigne par O_1 le point de coordonnées $(\alpha ; 0)$ et par O_2 le point de coordonnées $(-\alpha ; 0)$.
$P_1(\alpha)$ est la parabole de sommet I et de foyer O_1,
$P_2(\alpha)$ est la parabole de sommet O_1 et de foyer O_2.

1. Montrer que les équations des paraboles $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$ dans le repère $\left(\mathrm{I} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ sont respectivement :

$$y^2 = 4\alpha x \quad \text{et} \quad y^2 = -8\alpha x + 8\alpha^2.$$

2. **a.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection M_α et N_α des deux paraboles $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$. On désignera par M_α le point d'intersection dont l'ordonnée est du signe de α.

   b. En déduire l'ensemble des points M_α et N_α lorsque α décrit $\mathbb{R}^*$.

3. Montrer que $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$ sont respectivement les images de $P_1(1)$ et $P_2(1)$ par l'homothétie de centre I et de rapport α.
   En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{IM}_\alpha} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{IM}_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IN}_\alpha} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{IN}_1}$ et retrouver le résultat obtenu au 2. b.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans l'espace orienté on considère un carré de sommets A, B, C, D et de centre O.
On désigne par E le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}}$.
Soit f une isométrie laissant globalement invariant l'ensemble {A, B, C, D, E}.

1. **a.** Montrer que les images par toute isométrie des points A, B, C, D sont coplanaires. En déduire que l'ensemble {A, B, C, D, E} est globalement invariant par f et montrer que E est invariant.

   b. En remarquant que O est l'isobarycentre des points A, B, C, D montrer que O est invariant par f.

2. Si f est une rotation, quel est son axe ?
   En déduire toutes les rotations laissant l'ensemble {A, B, C, D, E} globalement invariant.

3. Montrer que si f est une réflexion, son plan contient la droite (OE).
   En déduire toutes les réflexions laissant l'ensemble {A, B, C, D, E} globalement invariant.

PROBLÈME **12 POINTS**

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Distance du point A(1 ; 1) à la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$

1. Construire, sur la feuille de papier millimétré, la courbe $(\mathscr{C})$ en précisant les points d'abscisses 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1 (unité : 5 cm ; le point A étant approximativement au centre de la feuille).

1. Djibouti, Égypte, Liban, Israël, Éthiopie, Maroc

2. Exprimer en fonction de l'abscisse x d'un point M de $(\mathscr{C})$ la distance $d(x)$ de A à M.
   Calculer la dérivée d' de la fonction d et montrer que pour tout réel $x, d'(x)$ est du signe de $g(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} + x - 1$.
3. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et préciser le comportement de g(x) quand x tend vers plus l'infini et quand x tend vers moins l'infini. On pourra remarquer que $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   La représentation graphique de g n'est pas demandée.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$ et que x_0 appartient à $]\ln 2\ ;\ 1[$.
5. Montrer que la fonction d admet un minimum absolu en x_0.
   Dans la suite du problème on notera M_0 le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0. Par définition la distance de A à $(\mathscr{C})$ est $d_0 = AM_0 = d\left(x_0\right)$.
6. Montrer que la tangente en M_0 à la courbe $(\mathscr{C})$ est perpendiculaire à la droite (AM_0).

Partie B

Évaluation de cette distance d_0
On considère l'application h, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$h(x) = \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} + 1.$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de h dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **Évaluation graphique**
   a. Dresser le tableau de variations de h (on précisera le comportement de $h(x)$ quand x tend vers plus l'infini et quand x tend vers moins l'infini).
   b. Étudier la position relative des courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ).
   c. Construire (Γ) dans le même repère que $(\mathscr{C})$ en précisant les points d'abscisses 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1.
   d. Montrer que (Γ) coupe la droite d'équation $y = x$ en un point H_0 de même abscisse que M_0 ; utiliser les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) pour construire M_0 et mesurer la distance d_0 en utilisant une règle graduée.
2. **Approximation de d_0**
   On considère la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & 1 \\ U_{n+1} & = & h\left(U_n\right) \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

   a. Montrer que pour tout x de $[\ln 2\ ;\ 1]$, $h(x)$ appartient à $[\ln 2\ ;\ 1]$. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, U_n appartient à $[\ln 2\ ;\ 1]$.
   b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante. (On utilisera un raisonnement par récurrence.) En déduire que (U_n) est convergente et montrer que sa limite est x_0.
   c. Donner une valeur approchée de U_4 à 10^{-4} près, puis une valeur approchée de $d\left(U_4\right)$.