Baccalauréat ES Centres étrangers juin 1995

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une étude a été faite sur la fréquentation du cinéma dans une ville française pendant un mois.
Dans cette ville, 25 % des habitants sont dans la tranche d'âge 0–14 ans (les « enfants ») et 20 % des habitants sont dans la tranche d'âge 15–25 ans (les « jeunes »). Les autres habitants seront dits « adultes ».
On choisit au hasard un habitant de cette ville.
On note E, J, et A les évènements suivants :

— E « l'habitant choisi est dans la tranche 0–14 ans » ;
— J « l'habitant choisi est dans la tranche 15–25 ans » ;
— A « l'habitant choisi est un adulte ».

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de séances auxquelles l'habitant choisi a assisté pendant un mois.
L'étude menée permet d'établir les tableaux de probabilités conditionnelles suivants :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i / E)$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{2}{10}$

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)/J)$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{10}$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i / A)$	$\dfrac{4}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{1}{10}$

Par exemple, $p(X = 2)/J$ désigne la probabilité pour que l'habitant choisi aille deux fois par mois au cinéma, sachant qu'il est jeune.

1. Déterminer la probabilité pour que l'habitant choisi :
   a. soit adulte ;
   b. soit jeune et aille deux fois par mois au cinéma.
2. Calculer la probabilité pour que l'habitant choisi aille deux fois par mois au cinéma.
3. **a.** Compléter le tableau suivant pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	0,315	0,280		0,165	

   b. Calculer $\mathrm{E}(X)$, l'espérance mathématique de X.
   Interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation :

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

2. En déduire la résolution, dans l'ensemble des nombres réels, des équations suivantes :
   a. $(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0.$
   b. $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3\ln 2.$

c. $\mathrm{e}^{x} - 4 = 5\mathrm{e}^{-x}$.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \mathrm{e}$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln u_n$.

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$; en déduire que v_n est le terme général d'une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. Donner l'expression de v_n en fonction de n. En déduire celle de u_n en fonction de n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$.
   a. Montrer que $P_n = \mathrm{e}S_n$.
   b. Exprimer S_n en fonction de n.
   c. En déduire l'expression de P_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$; en déduire celle de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PROBLÈME **12 points**

Le but du problème est de déterminer le prix d'équilibre d'un produit. On rappelle que le prix d'équilibre d'un produit est obtenu lorsque l'offre et la demande sont égales.

Prix proposé x_i	0,30	0,35	0,45	0,65	0,80	1
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25
Offre z_i	1,251	1,301	1,301	1,501	1,551	1,60

Une étude faite sur ce produit a donné les résultats suivants (le prix au kilogramme est exprimé en francs et les quantités pour l'offre et la demande sont exprimées en milliers de kilogrammes).
Dans ce problème, on utilisera, pour les calculs statistiques, les fonctions de la calculatrice (le détail de ces calculs n'est pas demandé). Tous les résultats numériques seront donnés en valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.

1. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 10 cm pour 1 franc en abscisse et 2 cm pour 1 millier de kilogrammes en ordonnée.
   Représenter sur le même graphique les nuages de points associés respectivement aux séries statistiques $(x_i\ ;\ y_i)$ et $(x_i\ ;\ z_i)$.
   Pour ces représentations, on recommande de prendre le papier millimétré dans le sens de la largeur et de figurer par des signes différents (croix ou points par exemple) les points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ et ceux de coordonnées $(x_i\ ;\ z_i)$ respectivement.
2. **Étude de la demande**
   La forme du nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel de y en x. On pose donc $Y_i = \ln y_i$.
   a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ Y_i)$. Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de Y en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?
   b. Donner alors une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y = ax + b$. Grâce à l'égalité $Y_i = \ln y_i$, en déduire une estimation de la demande y, en fonction du prix x au kilogramme.
3. **Étude de l'offre**
   La forme du nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ z_i)$ permet d'envisager un ajustement affine de z en x.

a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ z_i)$.

Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de z en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?

b. Donner alors une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = mx + p$.

4. Étude graphique du prix d'équilibre

On considère, dans la suite du problème, que la demande et l'offre sont respectivement formalisées par les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\ 1,41x+2,08}$ et $g(x) = 0,53x + 1,10$.

a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 2]$ et dresser son tableau de variations.

b. Sur le graphique du 1), tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.

c. Déterminer graphiquement le prix d'équilibre du produit.

5. Étude numérique du prix d'équilibre

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

a. Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ et dresser son tableau de variations.

b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[0\,;\,2]$ une solution unique x_0. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-1} près de x_0.

c. Quel est le prix d'équilibre du produit considéré ?