Baccalauréat ES Centres étrangers juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Aucun détail des calculs effectués à la calculatrice n'est exigé dans cet exercice.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffres d'affaires réalisé à l'exportation par une entreprise.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	101	107	122	127	139	136	157	165

x_1 désigne le rang de l'année,
y_i désigne l'indice du chiffre d'affaires à l'exportation rapporté à la base 100 en 1990.

1. **a.** Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série double dans un repère orthogonal. On prendra :
   - pour origine le point $M_0(0\ ;\ 100)$,
   - pour unités : 1,5 cm sur l'axe des abscisses,
     2 cm pour 10 points d'indice sur l'axe des ordonnées.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique. (On donnera la valeur décimale arrondie au dixième de l'ordonnée de G.)
2. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième du coefficient de corrélation linéaire de la série double. Ce résultat permet-il d'envisager un ajustement affine? Pourquoi?
3. Soit $\mathcal{D}$, la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

   a. Donner la valeur décimale arrondie au dixième du c?fficient directeur de la droite $\mathcal{D}$.

   b. En utilisant les coordonnées du point moyen G, donner une équation de la droite $\mathcal{D}$.
   Tracer cette droite sur le graphique précédent.
4. En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires se poursuive de la même façon au cours des années suivantes, estimer l'indice du chiffre d'affaires de cette entreprise en l'an 2001 (on en donnera la valeur arrondie à l'unité).

EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Une étude statistique indique que 95 % des téléviseurs fabriqués par une entreprise sont en état de fonctionnement. On fait subir à chaque appareil un test de contrôle.
On constate que :
• quand un appareil est en état de fonctionnement, il est accepté dans 96 % des cas à l'issue du test;
• quand un appareil n'est pas en état de fonctionnement, il est néanmoins accepté dans 8 % des cas à l'issue du test.
On choisit au hasard un téléviseur fabriqué par l'entreprise.
On définit les évènements suivants :
F : « le téléviseur est en état de fonctionnement »;
T : « le téléviseur est accepté à l'issue du test »;
$\overline{T}$: « le téléviseur est refusé à l'issue du test ».
Ainsi :
• la probabilité de l'évènement F, notée $P(F)$ est $0,95$;
• la probabilité $P(T/F)$ qu'un téléviseur soit accepté à l'issue du test sachant qu'il est en état de fonctionnement est $0,96$.

1. Calculer la probabilité que le téléviseur ne soit pas en état de fonctionnement.

2. **a.** Calculer la probabilité qu'un téléviseur soit refusé à l'issue du test sachant qu'il est en état de fonctionnement.
   b. Calculer la probabilité que le téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il soit en état de fonctionnement.
   c. Calculer la probabilité que le téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il ne soit pas en état de fonctionnement.
3. En déduire la probabilité pour que le téléviseur soit refusé à l'issue du test.
4. Quelle est la probabilité pour qu'un téléviseur soit en état de fonctionnement sachant qu'il est refusé à l'issue du test? (On donnera la valeur décimale arrondie au millième du résultat.)

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Le salaire annuel d'un technicien s'élevait pour l'année 1998 à 90 000 F.
Chaque année son employeur décide de l'augmenter de 2 % et de lui allouer en plus 5 000 F.
On désigne par S_0 le salaire du technicien pour l'année 1998. Pour tout entier naturel n, on désigne par S_n son salaire pour l'année $(1998 + n)$.
Par exemple : S_2 est le salaire du technicien pour l'année 2000.

1. Calculer S_1 et S_2.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
3. On définit la suite (U_n) par $U_n = S_n + 250000$ pour tout entier naturel.
   a. Calculer U_0.
   b. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $1,02$.
   c. Exprimer U_n en fonction de n.
4. **a.** Exprimer S_n en fonction de n.
   b. En déduire le salaire prévu pour l'année 2005.
5. À partir de quelle année le salaire de ce technicien aura-t-il doublé?

PROBLÈME **11 points**

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction et le tracé de sa représentation graphique (**partie B**) s'appuyant sur l'étude d'une fonction auxiliaire (**partie A**).
On calculera enfin une aire (**partie C**). On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats.

Partie A

1. Soient a, b et c des nombres réels. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x} + c$. On note g' la fonction dérivée de g.
   a. Calculer $g'(x)$.
   b. Le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$				+			0	-	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$e^{-2}+2$	$\searrow$	2

En utilisant les données numériques de ce tablcau, établir que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$.
Ainsi, pour la suite du problème : $g(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x} + 2$.

2. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1 ; 0]$. On note α cette solution.

   b. Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale arrondie au dixième de α.

3. Étudier le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x + 1 - x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$).

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra mettre x en facteur dans l'expression de $f(x)$).

2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que $f'(x) = g(x)$.

   b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on appelle $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f et $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = 2x + 1$.

   a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+1)]$.

   b. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

   c. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

   d. Tracer $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Partie C

Soient H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\mathrm{e}^{-x}(1+x)$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.
2. Hachurer sur le graphique précédent le domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $(\mathscr{D})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
3. Calculer l'aire S en cm^2 du domaine hachuré.