Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2000

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;4]$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, est la courbe $(\mathscr{C})$ donnée en annexe. Cette annexe est à rendre avec la copie.

Les points M, N, P, Q et R appartiennent à $(\mathscr{C})$. Les coordonnées de M sont $\left(0~;~\dfrac{3}{2}\right)$, celles de N sont $\left(1~;~\dfrac{7}{2}\right)$, celles de P sont $\left(2~;~\dfrac{5}{2}\right)$, celles de Q sont $\left(3~;~\dfrac{3}{2}\right)$ et celles de R sont $\left(4~;~\dfrac{7}{2}\right)$.

La courbe $(\mathscr{C})$ admet en chacun des points N et Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La droite (Δ) est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point P ; elle passe par le point S de coordonnées $(3;1)$.

1. **a.** Donner $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

   b. Déterminer une équation de la droite (Δ).

2. **a.** Déterminer à l'aide du graphique le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur l'intervalle $[~0~;~4]$.

   b. Tracer la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}$ sur le document en annexe puis, à l'aide du graphique, résoudre l'inéquation $f(x) < \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}$.

3. La fonction f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle $[0;4]$. En justifiant la réponse, donner le sens de variation de F.

4. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[~0~;~4]$ par :

$$g(x) = \dfrac{1}{f(x)}.$$

   a. Donner le tableau de variations de f.

   b. En déduire le tableau de variations de g.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. Une entreprise a fabriqué 20 000 objets d'un modèle α en 1999. Elle réduit progressivement cette production de 2 500 pièces par an jusqu'à ce que la production devienne nulle. On note u_0 la production du modèle α pour l'année 1999 et u_n la production du modèle α pour l'année $(1999 + n)$.

   a. Calculer u_1 et u_2.

   b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   c. Exprimer u_n en fonction de n.

   d. Déterminer le nombre total d'objets de modèle α qui auront été produits du 1er janvier 1999 au 31 décembre 2007.

2. Dès 1999, cette entreprise lance un nouveau modèle β. 11 000 objets du modèle β ont été produits en 1999. La production du modèle β augmente de 8 % chaque année. On note v_0 la production du modèle β pour l'année 1999 et v_n la production du modèle β pour l'année $(1999 + n)$. Les résultats numériques seront arrondis à l'unité près.

   a. Vérifier que $v_1 = 11\,880$ et calculer v_2.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

c. Exprimer v_n en fonction de n.

d. Calculer la production de l'année 2007.

e. Déterminer le nombre total d'objets de modèle β qui auront été produits du 1er janvier 1999 au 31 décembre 2007.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit la suite u_n définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x + 3$.

a. Tracer dans un même repère orthonormal d'unité 2 cm la représentation graphique (D) de la fonction f et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

c. En faisant apparaître le mode de construction, utiliser ce graphique pour représenter u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

d. Quels semblent être le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?

2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel, $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n$.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser son premier terme v_0.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. Exprimer v_n en fonction de u_n et en déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = -3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4.$$

d. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

e. Déterminer la limite de la suite (u_n).

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Calculer la fonction dérivée de g et étudier son signe.

2. Donner le tableau de variations de g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$). En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.)

2. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où f' est la fonction dérivée de f. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[2~;~3]$.
   À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

4. **a.** Calculer la limite de $\left[f(x) - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right]$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

   b. Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec la droite (D) d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$.

   c. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.

   d. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).

5. Tracer $(\mathscr{C})$, (D) et (T) dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie C

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{x^2 + x + (\ln x)^2}{2}$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $]0~;+\infty[$.

2. **a.** Hachurer, sur le graphique précédent, le domaine E limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

   b. Calculer l'aire de E en unité d'aire, de manière exacte.

   c. Donner la valeur exacte de cette aire en cm^2 et en donner la valeur décimale arrondie au dixième.

Annexe à rendre avec la copie