Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne le taux d'équipement en lave-vaisselle des ménages français, de 1975 à 1993.

Année	1975	1980	1985	1990	1993
x_i : rang de l'année	0	5	10	15	18
y_i : taux en %	8,4	16,5	23,1	30,0	33,6

(Source : INSEE)

Par exemple : 8,4 % des ménages français ont un lave-vaisselle en 1975.
Dans tout l'exercice, le détail des calculs n'est pas demandé. Les résultats pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ; ils seront arrondis à 10^{-3} *près.*
Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unité graphique : 0,5 cm par année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 3 % sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Représenter le nuage de points $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. On utilisera une feuille de papier millimétré.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique et le placer sur le dessin précédent.

2. **a.** Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
   Un ajustement affine est-il justifié ?

   b. Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter (D) sur le dessin précédent.

3. On suppose dans cette question que le modèle obtenu à la question **2.** reste valable pour les années suivantes.

   a. Calculer le taux d'équipement en lave-vaisselle que l'on peut prévoir en 2002.

   b. En quelle année ce taux dépasserait-il 50 % ? Déterminer l'année par le calcul.
   Expliquer comment on peut retrouver graphiquement ce résultat.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une enquête est faite auprès des élèves d'un lycée. Elle révèle que 30 % d'entre eux sont allés le mois précédent au moins quatre fois au cinéma.

1. D'après cette enquête, quelle est la probabilité pour qu'un lycéen, pris au hasard, y soit allé au plus trois fois ?

2. On interroge trois élèves choisis au hasard et de manière indépendante.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves qui, parmi ces trois élèves, sont allés au moins quatre fois au cinéma le mois précédent.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra utiliser un arbre pondéré.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. Soit F la fonction de répartition de X. Représenter graphiquement F dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm par unité en abscisse et 10 cm pour une unité en ordonnée).

EXERCICE 2 **5 points**

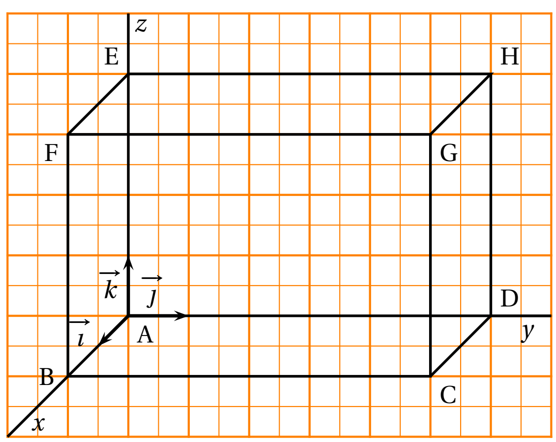
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{A} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

ABCDEFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\vec{\imath}$; $\overrightarrow{\text{AD}} = 6\vec{\jmath}$; et $\overrightarrow{\text{AE}} = 4\vec{k}$.

I, J et K sont les milieux respectifs de [EF], [FB] et [AD].

1. Placer les points I, J et K sur la figure donnée en annexe. Donner les coordonnées des points B, D et E. Puis vérifier par le calcul que I, J et K ont pour coordonnées respectives $(1 ; 0 ; 4)$, $(2 ; 0 ; 2)$ et $(0 ; 3 ; 0)$.
2. Soit (P_1) le plan d'équation $y = 0$ et (P_2) le plan d'équation $2x + z = 6$.
   a. Donner un vecteur $\vec{n}_1$, normal au plan (P_1) et un vecteur $\vec{n}_2$ normal au plan (P_2).
   b. En déduire que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
   c. Soit (Δ) l'intersection des deux plans (P_1) et (P_2).
   Montrer que (Δ) est la droite (IJ).
3. Soit $\vec{n}(2 ; 2 ; 1)$.
   a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$
   b. En déduire que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   c. Montrer alors que le plan (IJK) a pour équation $2x + 2y + z = 6$.
4. On considère le plan (P) d'équation $5x + y = 5$.
   a. Déterminer les coordonnées des points R et T, intersections du plan (P) avec les axes $(\text{A}x)$ et $(\text{A}y)$ respectivement.
   b. Vérifier que le point I appartient au plan (P).
   c. Sur la figure précédente, placer les points R et T, puis dessiner la trace du plan (P) sur le plan $(x\text{A}y)$.



PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)^2\text{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A ⋆ Étude d'une fonction

1. Calculer la limite de f en - ∞.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x^2\text{e}^{-x} + 2x\text{e}^{-x} + \text{e}^{-x}$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}\text{e}^{-x} = 0$, pour tout réel α.)
   Quelle interprétation graphique peut-on en faire ?
3. Soit la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(1 - x^2\right)\text{e}^{-x}.$$

4. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Résumer cette étude dans un tableau.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[1\,;3]$. Donner un encadrement décimal de x_0, d'amplitude 10^{-2}.
7. Construire dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 2 cm la courbe $(\mathscr{C})$, la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0, ainsi que les tangentes horizontales à la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B ⋆ Étude de la fonction inverse

1. Montrer que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(x_0)$, où x_0 désigne le nombre défini à la question **6.** de la **partie A**.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ en donnant les justifications nécessaires.

Partie C ⋆ Calcul d'aire

On considère la fonction F définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \left(-x^2 - 4x - 5\right)\text{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2 du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
   Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis une valeur approchée par défaut de $\mathscr{A}$ à 10^{-2} près.