Baccalauréat S Centres étrangers I juin 1997

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'évènement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

a. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A peut s'écrire :

$$p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right).$$

b. Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'évènement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
Vérifier que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B peut s'écrire

$$p(B) = \frac{6}{4(n+3)}.$$

3. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2.

— Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs;
— Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs;
— Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10. ? Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}v\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, l'unité graphique est 1 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = \left(3\sqrt{3}-2\right) + \mathrm{i}\left(3+2\sqrt{3}\right) \quad ; \quad z_{\mathrm{B}} = \left(-\sqrt{3}-1\right) + \mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right) \quad ;$$
$$z_{\mathrm{C}} = \left(1-4\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\left(-4-\sqrt{3}\right).$$

1. On se propose de placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O}v\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ à l'aide du compas. Pour cela on considère la rotation R de centre O et d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R.

b. Vérifier que R transforme le point A en le point A$'$ d'affixe : $4-6\text{i}$.
On admettra que R transforme les points B et C en les points B$'$ et C$'$ d'affixes respectives $2+2\text{i}$ et ?$2+8\text{i}$.

c. Placer les points A$'$, B$'$, C$'$ puis, à l'aide du compas, les points A, B, C. (La construction du point A sera justifiée).

2. a. Calculer $z_{\text{A}} - z_{\text{B}} + z_{\text{C}}$.

b. En déduire que le point O est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1),\ (B,\ -1),\ (C,\ 1)\}$.

3. Soit l'ensemble C des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

a. Vérifier que B appartient à C.

b. Déterminer puis tracer l'ensemble C.

4. Déterminer puis tracer l'ensemble D des points M du plan tels que :

$$2.\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\|.$$

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}v\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on donne les points A d'affixe 2i, B d'affixe 2 et I milieu de [AB] (on prendra 2 cm pour unité graphique).

On considère la fonction f qui, à tout point M distinct de A, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :?

$$z' = \frac{2z}{z-2\text{i}}.$$

1. a. Montrer que f admet comme points invariants le point O et un deuxième point dont on précisera l'affixe.

b. Déterminer les images par f des points B et I.

2. Soit M un point quelconque distinct de A et de O.
Établir que :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) & = & \left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MO}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ \text{O}M' & = & 2\dfrac{\text{MO}}{\text{MA}}\end{array}\right.$$

3. Soit (Δ) la médiatrice de [OA].
Montrer que les transformés par f des points de (Δ) appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera.

4. Soit (Γ) le cercle de diamètre [OA], privé du point A. Montrer que les transformés par f des points de (Γ) appartiennent à une droite (D) que l'on précisera.

5. Tracer (Δ), (Γ), (C), (D) sur une même figure.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit la fonction f définie pour tout réel x différent de 1 par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2(1-x)}$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, et lorsque x tend vers 1.
Interpréter graphiquement ces résultats.
   b. Vérifier que, pour tout x différent de 1, $f(x)$ peut s'écrire :
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{-x} \times \frac{x}{2(x-1)}$$
En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. **a.** Montrer que $f'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{2(1-x)^2}$.
   b. Étudier les variations de f.
   c. Montrer que f admet un minimum que l'on précisera sur l'intervalle
$]-\infty\,;\,1[$.

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

où y est une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E).
2. On considère les solutions de (E) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
   a. Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme : $\left(ax + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.
On note alors :
$$h_a(x) = \left(ax + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
où a est un nombre réel.
   b. Faire l'étude du sens de variation de h_a selon les valeurs de a et montrer que, pour tout réel a différent de 0, h_a admet un extremum pour une valeur de x que l'on déterminera en fonction de a.
   c. On note $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de h_a et S_a le point de $\mathscr{C}_a$ correspondant à l'extremum de h_a ; vérifier que, pour tout réel a différent de 0, S_a est un point de Γ, la courbe définie dans la partie A.

Partie C

Sur la feuille donnée en annexe, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les courbes $\mathscr{C}_a$ pour $a = \dfrac{1}{4}$ et pour quatre autres valeurs de a : $-2,\ 0,\ 1$ et 2.

1. Sur cette feuille annexe, construire Γ et ses droites asymptotes.

2. Pour chacune des courbes $\mathscr{C}_a$ tracées (autres que $\mathscr{C}_{\frac{1}{4}}$), déterminer la valeur correspondante de a en indiquant la méthode utilisée.

Partie D

Dans cette partie, on considère la fonction h_a obtenue pour $a = \dfrac{1}{4}$.
Soit λ un nombre réel supérieur à -2 ; on appelle D_λ l'ensemble des points du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_{\frac{1}{4}}$ et la droite d'équation $x = \lambda$.

1. Exprimer $I = \displaystyle\int_{-2}^{\lambda} h_{\frac{1}{4}}(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de λ ; on pourra utiliser une intégration par parties ou se servir de l'équation différentielle (E).
2. Soit $\mathscr{A}(\lambda)$ la mesure en unités d'aire de l'aire D_λ ; quelle est la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$?