

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Centres étrangers juin 2006 ∞

EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

ii. Pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, \bar{z} désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z .

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.

On lit le nombre sur la face cachée.

Pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.

Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1 , p_2 , p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$ démontrer que $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
 - a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4?
 - b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant?

3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
- Pour $1 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.
 - Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter le résultat obtenu.
 - Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
- On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n -ième lancer.
- Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
 - Calculer $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n) .
 - Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0,999$.

EXERCICE 2**5 points****Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p , alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ».

Partie A. Quelques exemples

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , 4^n est congru à 1 modulo 3.
- Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
- Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k , le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
- Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5?
- À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

- Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$.
- Soit $n \geq 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ et r le reste de la division euclidienne de n par b .
 - Démontrer que $4^r \equiv 1 \pmod{p}$. En déduire que $r = 0$.
 - Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b .
 - En déduire que b divise $p - 1$.

EXERCICE 3**6 points****Commun à tous les candidats**

On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , (unité graphique : 5 cm).

Partie A. Étude de la fonction f

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x . En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .
4. Dresser le tableau des variations de f .
5. Tracer la courbe \mathcal{C} et ses asymptotes éventuelles dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie B. Quelques propriétés graphiques

1. On considère les points M et M' de la courbe \mathcal{C} d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$. Que représente le point A pour la courbe \mathcal{C} ?
2. Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$, \mathcal{A}_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.
 - a. Calculer \mathcal{A}_n .
 - b. Étudier la limite éventuelle de \mathcal{A}_n , lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Calcul d'un volume.

Soit λ un réel positif, On note $\mathcal{V}(\lambda)$ l'intégrale $\int_{-\lambda}^0 \pi [f(x)]^2 dx$.

On admet que $\mathcal{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe \mathcal{C} obtenue pour $-\lambda \leq x \leq 0$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\text{pour tout nombre réel } x : \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2}$$

2. Exprimer $\mathcal{V}(\lambda)$ en fonction de λ .
3. Déterminer la limite de $\mathcal{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \vec{AB}; \vec{AD}, \vec{AE})$

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

1. Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
 - a. Calculer les coordonnées de I.

b. Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G?

3. Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre réel k , on définit deux points M_k et N_k , ainsi qu'un plan \mathcal{P}_k de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}$;
- \mathcal{P}_k est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan \mathcal{P}_k et de la droite (BC).

1. Identifier $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.

2. Calcul des coordonnées de N_k .

a. Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

b. Déterminer une équation du plan \mathcal{P}_k dans ce repère.

c. En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1 ; 3k - 1 ; 0)$.

3. Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?

4. Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?

5. Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$.

Tracer la droite $(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}})$ sur la même figure.

ANNEXE

Exercice 4 (commun à tous les candidats)

Feuille à compléter et à rendre avec la copie

